サクライ

上級量子力学

［第Ⅱ巻］

共変な摂動論

ADVANCED
QUANTUM MECHANICS

J.J.サクライ 著
樺沢 宇紀 訳

丸善プラネット株式会社

J.J. SAKURAI
Late of the Department of Physics,
University of California, Los Angeles

ADVANCED QUANTUM MECHANICS

Authorized translation from the English edition, entitled ADVANCED QUANTUM MECHANICS, 1st Edition, ISBN 0201067102 by SAKURAI, J. J., published by Pearson Education, Inc, publishing as Addison Wesley,

Japanese language edition published by Maruzen Planet Co., Ltd., © 2010
Under translation agreement with Pearson Education, Inc, the Japanese language edition published in 2 volumes.

PRINTED IN JAPAN

目 次

第 4 章　共変な摂動論

4.1　自然単位系と次元

相対論的な量子論では，作用 (エネルギーと時間の積) を $\hbar$ で計り，長さを時間で割った量を c で計る単位系を用いるのが最も便利である．この単位系は“自然単位系”(natural units) と呼ばれる．本書ではこれ以降，自然単位系を採用する．そうすると記号 m_e は，電子質量を表すのみならず，以下のようにいろいろな意味を持つことになる．

a) 長さの逆数 (波数)

$$m_e\left(=\frac{1}{\hbar/m_e c}\right)=\frac{1}{3.86\times10^{-11}\,\mathrm{cm}}=\frac{1}{3.86\times10^{-13}\,\mathrm{m}} \tag{4.1}$$

b) 時間の逆数 (振動数)

$$m_e\left(=\frac{1}{\hbar/m_e c^2}\right)=\frac{1}{1.29\times10^{-21}\,\mathrm{sec}} \tag{4.2}$$

c) エネルギー

$$m_e\left(=m_e c^2\right)=0.511\,\mathrm{MeV} \tag{4.3}$$

d) 運動量

$$m_e\left(=m_e c\right)=0.511\,\mathrm{MeV}/c \tag{4.4}$$

自然単位系では，微細構造定数は単純に，

$$\alpha=\frac{e^2}{4\pi}\simeq\frac{1}{137.04} \tag{4.5}$$

と表される‡．電子と光子の“純粋な”電磁力学において，m_e 以外に質量や長さの逆数を持つ定数は無い．したがって純粋な次元の考察だけから，次数が e^2 の任意の電

‡(訳註) したがって e も無次元定数となり $e\approx0.303$ である．計算の際には $e^2/\pi\approx4/137.04$ などを利用すればよい (式(4.16)-(4.17)参照).

磁的過程による断面積は,

$$\frac{\alpha^2}{m_e^2} = \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{m_e^2} = r_0^2 \tag{4.6}$$

のオーダーになると推定することができる. r_0 は古典電子半径である. 実際, 定係数因子 $8\pi/3$ を除き, 式(4.6) は第2章で計算した Thomson 散乱の断面積そのものである. α と m_e を用いて, 原子物理において馴染みのある他の定数も得られる. たとえば Bohr 半径は,

$$a_0 = \frac{1}{\alpha m_e} \tag{4.7}$$

と与えられ, 次の関係が成立している.

$$a_0 : \frac{1}{m_e} : r_0 \simeq 137 : 1 : \frac{1}{137} \tag{4.8}$$

Rydberg(リュードベリ)エネルギーは, 次のように表される.

$$Ry_\infty = \frac{\alpha^2 m_e}{2} = 13.6\,\mathrm{eV} \tag{4.9}$$

高エネルギー物理におけるひとつの典型的なエネルギー尺度は, π 中間子の静止エネルギーによって与えられる.

$$m_\pi = \begin{cases} 139.6\,\mathrm{MeV} & \text{for } \pi^\pm \\ 135.0\,\mathrm{MeV} & \text{for } \pi^0 \end{cases} \tag{4.10}$$

これに対応する典型的な長さは, 便宜的に,

$$\frac{1}{m_\pi} \simeq \sqrt{2} \times 10^{-13}\,\mathrm{cm} = \sqrt{2} \times 10^{-15}\,\mathrm{m} \tag{4.11}$$

と表されるが, 上式は荷電 π 中間子に関して 0.07%以内の精度で適用できる. 強い相互作用において α に相当する無次元定数 (結合定数) は 1 前後のオーダーなので, 強い相互作用をする粒子の典型的な断面積は, おおよそ,

$$\frac{1}{m_\pi^2} \simeq 2 \times 10^{-26}\,\mathrm{cm}^2 = 2 \times 10^{-30}\,\mathrm{m}^2 = 20\,\mathrm{mb} \tag{4.12}$$

程度と推定される[§]. 実際, この値は高エネルギーにおける $\pi^\pm$-p衝突の全断面積と同等である. 強い相互作用によって崩壊する短寿命状態を想定してみよう. そのような状態の崩壊幅は π 中間子の静止エネルギーのオーダーになると考えられる. たと

§(訳註) 単位の“b”は断面積の慣用単位 barn (バーン) である. $1\,\mathrm{b} = 10^{-24}\,\mathrm{cm}^2 = 10^{-28}\,\mathrm{m}^2$.

えば ρ 中間子 (質量776 MeV) の崩壊幅は約100 MeV である[1)]. 崩壊幅が 100 MeV の状態の平均寿命は 6.58×10^{-24} sec であり，これが強い相互作用における典型的な時間尺度である. 3.11節で示したように弱い相互作用の結合定数は強い相互作用のそれに対して 10^{14} 分の 1 程度なので，弱い相互作用における典型的な時間尺度は $10^{14} \times 6.6 \times 10^{-24}$ sec 程度と考えられるが，実際に弱い相互作用で崩壊する K 中間子や Λ ハイペロンなどの寿命は 10^{-8} から 10^{-10} sec 程度である.

実際のどのような計算も $\hbar = 1$ および $c = 1$ の下で完遂することができる. 計算の最後に，もしそうしたいのであれば，次元が適正になるように適切な位置に $\hbar$ と c の具体的な数値を挿入すればよい. 自然単位系を通常の単位系に読み換えるために，次の関係を覚えておくと都合がよい.

$$\hbar = 6.58 \times 10^{-22}\ \mathrm{MeV\text{-}sec} \tag{4.13}$$

$$\hbar c = 1.973 \times 10^{-11}\ \mathrm{MeV\text{-}cm} = 1.973 \times 10^{-13}\ \mathrm{MeV\text{-}m} \tag{4.14}$$

例として，読者が既に問題2-5 (p.90) で見ている Σ^0ハイペロンの崩壊 ($\Sigma^0 \to \Lambda + \gamma$) を考えよう[†]. 第 2 章で用いた通常の単位系によって平均寿命を表すと，

$$\tau = \frac{\pi(m_\Lambda + m_\Sigma)^2 c^2}{e^2 \hbar k^3} \tag{4.15}$$

であり，同じ量を自然単位系を用いて計算すると，もちろん，

$$\tau = \frac{\pi(m_\Lambda + m_\Sigma)^2}{e^2 k^3} \tag{4.16}$$

となる. ここでは k が光子の波数 $E_\gamma/\hbar c$，光子エネルギー E_γ，光子の運動量 E_γ/c，光子の角振動数 $\omega = E_\gamma/\hbar$ を同時に意味することになる. 同様に質量 m_Λ はエネル

---

1) より定量的に扱うのであれば，ρ 中間子崩壊の相互作用密度 ($\rho^0 \to \pi^+ + \pi^-$) を，

$$\mathcal{H}_{\mathrm{int}} = g\phi_\mu \left(\phi_{\mathrm{ch}}^\dagger \frac{\partial \phi_{\mathrm{ch}}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \phi_{\mathrm{ch}}^\dagger}{\partial x_\mu} \phi_{\mathrm{ch}} \right)$$

と表す. ϕ_μ，ϕ_{ch}，$\phi_{\mathrm{ch}}^\dagger$ はそれぞれ ρ^0，π^-，π^+ の場の演算子である. そうすると，

$$\Gamma(\rho^0 \to \pi^+ + \pi^-) = \left(\frac{g^2}{4\pi} \right) \frac{(m_\rho^2 - 4m_\pi^2)^{3/2}}{12 m_\rho^2}$$

が得られ，$\Gamma = 100$ MeV と置くと $(g^2/4\pi) \simeq 2$ である. (以下訳註) ρ^0 は $(1/\sqrt{2})(\mathrm{u\bar{u}} - \mathrm{d\bar{d}})$ と表されるクォークの複合系である. π^0 も全く同じように $(1/\sqrt{2})(\mathrm{u\bar{u}} - \mathrm{d\bar{d}})$ と表されるが，前者はスピン 1 のベクトル中間子 ($J^P = 1^-$)，後者はスピン 0 の擬スカラー中間子 ($J^P = 0^-$) である. p.343訳註も参照.

†(訳註) Σ^0 も Λ も組成クォークは uds であるが，アイソスピン量子数が異なり，前者は $I = 1$，後者は $I = 0$ である. 組成クォーク個別のアイソスピン量子数は，u と d は $I = 1/2$，s は $I = 0$ であり，仮想的な“アイソ空間”内での u と d とのアイソスピンの合成の仕方が Σ^0 と Λ とで異なっているものと見なす. アイソスピンについては p.342訳註参照.

ギー $m_\Lambda c^2$，長さの逆数 $(\hbar/m_\Lambda c)^{-1}$，時間の逆数 $(\hbar/m_\Lambda c^2)^{-1}$ などを意味する．しかしこれらの事情をいちいち気にする必要はない．我々が注意しなければならないのは，式(4.16) の m_Λ，m_Σ，k をすべて MeV 単位で表したとすると，次元を整合させるために式(4.16) の右辺に $\hbar = 6.58 \times 10^{-22}$ MeV-sec を掛ける必要があるという点である．$(m_\Lambda + m_\Sigma)c^2 = 2307\,\text{MeV}$，$E_\gamma = 74.5\,\text{MeV}$ とすると，次のように数値が得られる．

$$\tau = \frac{137}{4}\left(\frac{2307\,\text{MeV}}{74.5\,\text{MeV}}\right)^2 \frac{6.58\times 10^{-22}\,\text{MeV-sec}}{74.5\,\text{MeV}} \simeq 2.9\times 10^{-19}\,\text{sec} \tag{4.17}$$

計算の各段階において $\hbar$ と c をすべて取り込み，ハイペロンの質量をグラム単位にしたり，e を $(\text{gram})^{1/2}(\text{cm})^{3/2}(\text{sec})^{-1}$ で表したりすることは時間の浪費にしかならない．自然単位系を採用しておけば，数値を扱うことがはるかに容易になる．

本節を締め括るにあたり，場の演算子の次元に関していくつか注意を与える．ハミルトニアン密度 $\mathcal{H}$ やラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ は，エネルギーを体積で割った次元を持たなければならない．

$$[\mathcal{L}] = \frac{\text{エネルギー}}{(\text{長さ})^3} \xrightarrow{\text{natural units}} (\text{質量})^4 \tag{4.18}$$

ボゾン場 ϕ (もしくは $\mathbf{A}$) は，ラグランジアン密度において $(\partial\phi/\partial x_\mu)^2$，$(mc/\hbar)^2\phi^2$，$[(1/c)\partial\mathbf{A}/\partial t]^2$ のような形で現れる．これは次を含意する．

$$[\phi] = \sqrt{\frac{\text{エネルギー}}{\text{長さ}}} \xrightarrow{\text{natural units}} \text{質量} \tag{4.19}$$

平面波展開(2.60) に現れる因子 $c\sqrt{\hbar/2\omega V}$ は，実際に $\sqrt{\text{エネルギー}/\text{長さ}}$ の次元を持つ．このことは第2章で消滅演算子と生成演算子を無次元の演算子として定義してあることから予想される通りである．式(3.360) によると Dirac 場 ψ はラグランジアン密度において $\hbar\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial\psi/\partial x_\mu)$ や $mc^2\bar{\psi}\psi$ という形で現れる．したがって，

$$[\psi] = \sqrt{\frac{1}{(\text{長さ})^3}} \xrightarrow{\text{natural units}} (\text{質量})^{3/2} \tag{4.20}$$

である．これも平面波展開(3.392) における因子 $\sqrt{mc^2/EV}$ と次元が同じであり，消滅演算子・生成演算子や自由粒子スピノル $u^{(s)}(\mathbf{p})$ を無次元に定義してあることと辻褄が合っている．相互作用密度を構築する際には，$i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu$ や ϕ^4 のような因子は自然単位系において自動的にハミルトニアン密度の次元を持つこと，ϕ^3 のような因子には質量の次元を持つ定数を掛ける必要があることなどを念頭に置いておくことが肝要である．

4.2 相互作用表示によるＳ行列展開

相互作用表示 本章では摂動論の正当性を仮定して，いろいろな物理過程を論じてみるが，第２章で示したような通常の時間に依存する摂動論は，時空座標やエネルギー-運動量変数が共変な形で用いられていないので，相対論的な粒子を含むような過程を扱う上であまり便利ではない．しかしハミルトニアン形式の枠内において“相互作用表示”(interaction representation) と呼ばれる表示を採用すると，遷移行列を明白な共変性を備えた形で与えることができる．場の量子論におけるこの表示の有用性は，1947年に S. Tomonaga (朝永振一郎) と J. Schwinger(シュウィンガー)によって認識された．

通常の Schrödinger 表示において，状態ベクトル $\Phi^{(\mathrm{S})}(t)$ の時間発展は Schrödinger 方程式によって与えられる．

$$i\frac{\partial\Phi^{(\mathrm{S})}}{\partial t} = H^{(\mathrm{S})}\Phi^{(\mathrm{S})} \tag{4.21}$$

上付きの (S) は Schrödinger 表示を意味する．$H^{(\mathrm{S})}$ を２つの部分に分ける．

$$H^{(\mathrm{S})} = H_0^{(\mathrm{S})} + H_\mathrm{I}^{(\mathrm{S})} \tag{4.22}$$

$H_0^{(\mathrm{S})}$ は非摂動状態を表す主要ハミルトニアン，$H_\mathrm{I}^{(\mathrm{S})}$ は摂動ハミルトニアンである．場の理論では $H_0^{(\mathrm{S})}$ を自由場ハミルトニアンとし，$H_\mathrm{I}^{(\mathrm{S})}$ を相互作用ハミルトニアン密度の空間積分とする．

ここで，次の変換を考える．

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= e^{iH_0^{(\mathrm{S})}t}\,\Phi^{(\mathrm{S})} \\ O(t) &= e^{iH_0^{(\mathrm{S})}t}\,O^{(\mathrm{S})}\,e^{-iH_0^{(\mathrm{S})}t} \end{aligned} \tag{4.23}$$

$O^{(\mathrm{S})}$ は Schrödinger 表示の演算子である．上の変換は表示の変更——Schrödinger 表示から，いわゆる相互作用表示への変更——と見なされる．上付き添字が付かない Φ および O は相互作用表示における状態ベクトルおよび演算子を表すものと見なし，それぞれ Schrödinger 表示における $\Phi^{(\mathrm{S})}$ および $O^{(\mathrm{S})}$ に対応するものとする．$\Phi(t)$ の時間発展は，次のように与えられる．

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\Phi}{\partial t} &= i\left[iH_0^{(\mathrm{S})}e^{iH_0^{(\mathrm{S})}t}\,\Phi^{(\mathrm{S})} + e^{iH_0^{(\mathrm{S})}t}\frac{\partial\Phi^{(\mathrm{S})}}{\partial t}\right] \\ &= -H_0^{(\mathrm{S})}e^{iH_0^{(\mathrm{S})}t}\,\Phi^{(\mathrm{S})} + e^{iH_0^{(\mathrm{S})}t}\left(H_0^{(\mathrm{S})} + H_\mathrm{I}^{(\mathrm{S})}\right)e^{-iH_0^{(\mathrm{S})}t}e^{iH_0^{(\mathrm{S})}t}\,\Phi^{(\mathrm{S})} \\ &= H_\mathrm{I}\Phi \end{aligned} \tag{4.24}$$

$H_{\rm I}$ は相互作用表示で表した摂動ハミルトニアンである．時刻 $t=0$ において $O^{(\rm S)}$ と O が一致することに注意すると，相互作用表示の演算子の時間依存性は，

$$O(t) = e^{iH_0^{(\rm S)}t}O(0)e^{-iH_0^{(\rm S)}t} \tag{4.25}$$

である．ここから相互作用表示の演算子 O が満たすべき運動方程式が，次のように与えられることが分かる．

$$\dot{O} = i[H_0^{(\rm S)}, O] = i[H_0, O] \tag{4.26}$$

$H_0^{(\rm S)}$ と相互作用表示の H_0 は等しいことに注意されたい．もし $H_{\rm I}$ がゼロであれば，式(4.24) において状態ベクトルは Heisenberg 表示の場合と同様に時間に依存しなくなること，式(4.26) が Heisenberg の運動方程式において全ハミルトニアンを H_0 に置き換えた形をしていることは興味深い．しかし，これらの性質はあらかじめ予想されることである．すなわち表示の変換式(4.23) は，Schrödinger 表示と Heisenberg 表示の変換式において $H^{(\rm S)}$ を $H_0^{(\rm S)}$ に置き換えた形をしている．

3 通りの表示の違いを系統的に比較すると，以下のようになる．

a) “Heisenberg 表示”では，状態ベクトルは時間に依存せず，演算子が Heisenberg の運動方程式に従って時間発展する．

b) “Schrödinger 表示”では，状態ベクトルが時間依存性をすべて受け持つ．

c) “相互作用表示”では，時間依存性が 2 つの部分に分かれる．相互作用を除いた系の時間依存性を演算子が担い，残りの相互作用に起因する時間発展を状態ベクトルが担う．この理由から，相互作用表示は“中間的表示”(intermediate representation) とも呼ばれる．

場の量子論において，相互作用表示の場の演算子は H_0 だけを含む運動方程式 (4.26) を満たす．これは相互作用があっても場の演算子が“自由場の方程式”を満たすことを意味する．我々は前章から既に自由場について多くのことを知っているので，この性質は好都合である．たとえば電子場について平面波展開(3.392) を用いることができる．

相互作用ハミルトニアンに関しては，相互作用表示の $H_{\rm I}$ は $H_{\rm I}^{(\rm S)}$ と異なり，これを構成する場の演算子それぞれが時間に依存する自由場の演算子に置き換わる．

U 行列と S 行列　微分方程式(4.24) の形式解を求めてみよう．まず，時間発展演算子 $U(t, t_0)$ を次のように定義する．

$$\Phi(t) = U(t, t_0)\Phi(t_0) \tag{4.27}$$

$\Phi(t_0)$ は，ある時刻 t_0 における系の状態を与える相互作用表示の状態ベクトルである．次の性質は自明である．

$$U(t_0, t_0) = 1 \tag{4.28}$$

式(4.24) は，次式と等価である．

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) = H_{\rm I}U(t, t_0) \tag{4.29}$$

ここで微分方程式(4.29) と境界条件(4.28) を組み合わせて，１本の積分方程式を得ることができる．

$$U(t, t_0) = 1 - i\int_{t_0}^{t} dt H_{\rm I}(t)U(t, t_0) \tag{4.30}$$

上式を反復代入の手続きによって形式的に解くと，次のようになる．

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 - i\int_{t_0}^{t} dt_1 H_{\rm I}(t_1)\left[1 - i\int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{\rm I}(t_2)U(t_2, t_0)\right] \\ &= 1 - i\int_{t_0}^{t} dt_1 H_{\rm I}(t_1) + (-i)^2\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{\rm I}(t_1)H_{\rm I}(t_2) + \cdots \\ &\quad + (-i)^n\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_{\rm I}(t_1)H_{\rm I}(t_2)\cdots H_{\rm I}(t_n) + \cdots \end{aligned} \tag{4.31}$$

U の物理的な意味は次のように理解される．系が時刻 t_0 において状態 i にあることが分かったとしよう．その後のある時刻 t において，系が状態 f にあることが見いだされる確率は，

$$\left|\langle\Phi_f|U(t, t_0)\Phi_i\rangle\right|^2 = |U_{fi}(t, t_0)|^2 \tag{4.32}$$

と与えられる．$i \to f$ の単位時間あたりの遷移確率 (頻度) は，

$$w = \frac{1}{t - t_0}|U_{fi}(t, t_0) - \delta_{fi}|^2 \tag{4.33}$$

と表される．式(4.31) における“１”は相互作用がなくても存在する非遷移成分なので，ここではこれに相当する δ_{fi} の減算が挿入されている．時間区分 $t - t_0$ が短ければ，この頻度はむしろ複雑な時間依存性を持つが，次節で具体的な問題を見ると分かるように $t_0 \to -\infty$，$t \to +\infty$ とすると遷移頻度は確定的な極限値に近づく．そこで，Ｓ行列として知られる演算子を次のように定義する．

$$S = U(\infty, -\infty) \tag{4.34}$$

式(4.27)に従い，S行列は相互作用表示における無限の未来の状態 $\Phi(\infty)$ と無限の過去の状態 $\Phi(-\infty)$ を関係づける．

$$\Phi(\infty) = S\Phi(-\infty) \tag{4.35}$$

S行列の具体的な形は，式(4.31)から容易に得ることができる．

$$\begin{aligned} S &= S^{(0)} + S^{(1)} + S^{(2)} + S^{(3)} + \cdots \\ &= 1 - i\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 H_{\mathrm{I}}(t_1) + (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_{\mathrm{I}}(t_1) H_{\mathrm{I}}(t_2) + \cdots \\ &\quad + (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n H_{\mathrm{I}}(t_1) H_{\mathrm{I}}(t_2) \cdots H_{\mathrm{I}}(t_n) + \cdots \end{aligned} \tag{4.36}$$

式(4.36)が有用となり得るか否かは，相互作用の強さに依存する．量子電磁力学においてS行列は速く収束するので，最初のいくつかの項を考慮するだけで，観測値とよく一致する計算結果を得ることができる．これはもちろん無次元の結合定数である α が1に比べて充分に小さいからである．しかしながら強い相互作用の計算に上述のS行列展開を適用しようとすると，冪(べき)を形成する結合パラメーターが1前後のオーダーになってしまい，収束性は極めて悪い．

この段階で，ここで展開した形式と第2章で用いたDiracの時間に依存する摂動論との関係が関心の対象となるであろう．まず式(2.107)を見てみると，これは係数 $c_j(t)$ の時間発展を記述している．c_j が縦行列を構成し，これが本節の状態ベクトル Φ に対応するものと見るならば，微分方程式(2.107)は正確に式(4.24)に対応する．係数 $c_j(t)$ は時間発展演算子の展開式(4.31)の始状態 (k) と終状態 (j) の間の行列式そのものである．$c_j^{(0)} = \delta_{jk}$ は式(4.31)の最初の項の1に対応する．式(2.109)によって与えられる $c_j^{(1)}(t)$ は展開式(4.31)の第2項において $t_0 = 0$ と置いたものに対応する．これは次の関係を考えれば明らかである．

$$\begin{aligned} \langle j|H_{\mathrm{I}}(t)|k\rangle &= \langle j|e^{iH_0 t} H_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{S})} e^{-iH_0 t}|k\rangle \\ &= \langle j|H_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{S})}|k\rangle e^{i(E_j - E_k)t} \end{aligned} \tag{4.37}$$

さらに高次の項にも同様の対応関係が見いだされる．この観点から相互作用表示の基本概念は，Diracの時間に依存する摂動論のそれと同じであることが分かる．

しかしながら非相対論的な量子力学における摂動論と，本節で展開する摂動論には重要な違いがある．非相対論的な理論では式(4.37)を用いて，まず式(4.36)の $t_1, t_2, \ldots$

に関する積分を行って，次のような式で規定される等エネルギー状態間の“T行列”すなわち“遷移行列”(transition matrix) T_{fi} を得る‡.

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi i\delta(E_f - E_i)T_{fi} \tag{4.38}$$

$$T_{fi} = H_{fi}^{(S)} + \sum_n \frac{H_{fn}^{(S)}H_{ni}^{(S)}}{E_i - E_n + i\epsilon} + \cdots \tag{4.39}$$

(ここでは議論を簡単にするために $H^{(S)}$ が時間に依存しないものとした.）そして，それから次のような空間積分を実行することになる.

$$H_{fn}^{(S)} = \frac{1}{V}\int e^{-i\mathbf{p}_f\cdot\mathbf{x}}H^{(S)}e^{i\mathbf{p}_n\cdot\mathbf{x}}d^3x \tag{4.40}$$

これは本章で我々が採用する方法ではない．その代わりに空間積分と時間積分を共変な形で“同時に”行うことを提案する．その結果として，時間発展の基本式(4.24)や相互作用ハミルトニアン，

$$H_{\mathrm{I}} = \int \mathcal{H}_{\mathrm{int}}d^3x \tag{4.41}$$

が共変な形でないにもかかわらず，共変性が明白な遷移行列の式を得ることが可能となる．後に続く節において，この方法がどのように機能するかを見てゆくことにする.

ユニタリー性 本節の最後の話題として，S行列のユニタリー性を論じる．すなわち，

$$SS^\dagger = 1 \tag{4.42a}$$

$$S^\dagger S = 1 \tag{4.42b}$$

という性質であるが，これは等価的に次のようにも表される.

$$\sum_n S_{fn}S_{in}^* = \delta_{fi} \tag{4.43a}$$

$$\sum_n S_{nf}^*S_{ni} = \delta_{fi} \tag{4.43b}$$

この重要な性質を証明する方法はいくつかあるが，ここでは具体的なS行列展開の式(4.36)に基づいた(2次までの)直接的な証明を行うことにする．H_{I} はある結合パラメーター λ の1次式であると仮定する．たとえば，

$$H_{\mathrm{I}} = -ie\int\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu d^3x$$

‡(訳註) 式(4.38)の“等エネルギー遷移行列”の代わりに，共変な議論への移行を念頭に置いて，系の4元運動量保存因子 $\delta^{(4)}(\Sigma p_f - \Sigma p_i)$ を分離した形で $S_{fi} = \delta_{fi} - (2\pi)^4 i\delta^{(4)}(\Sigma p_f - \Sigma p_i)T_{fi}$ のように T_{fi} を定義する文献が多い．後から出てくる共変な $\mathcal{M}$ 行列 (式(4.119)，式(4.165)) との関係は，このような“4元運動量保存を想定した遷移行列”の方が，より直接的になる.

を扱うならば，e そのものを λ と見ればよい．そうすると展開式(4.36) は λ の冪級数の式と見ることができる．$S^{(0)}$ は $\lambda^0=1$ に比例し，$S^{(1)}$ は λ に比例し，$S^{(2)}$ は λ^2 に比例する．ユニタリー性を表す式(4.43a) は次のように書かれる．

$$\sum_n \left(S_{fn}^{(0)}+S_{fn}^{(1)}+S_{fn}^{(2)}+\cdots\right)\left(S_{in}^{(0)*}+S_{in}^{(1)*}+S_{in}^{(2)*}+\cdots\right)=\delta_{fi} \tag{4.44}$$

この式が，任意の λ の値に関して恒等的に成立しなければならない．したがってS行列がユニタリー性を持つならば，左辺の λ の各次数の項の係数がすべてゼロになるはずである．よって，

$$\sum_n S_{fn}^{(0)}S_{in}^{(0)*}-\delta_{fi}=0 \tag{4.45a}$$

$$\sum_n \left(S_{fn}^{(0)}S_{in}^{(1)*}+S_{fn}^{(1)}S_{in}^{(0)*}\right)=0 \tag{4.45b}$$

$$\sum_n \left(S_{fn}^{(0)}S_{in}^{(2)*}+S_{fn}^{(2)}S_{in}^{(0)*}\right)+\sum_n S_{fn}^{(1)}S_{in}^{(1)*}=0 \tag{4.45c}$$

などが要請される．式(4.45a) が成立することは，次の関係から自明である．

$$S_{fn}^{(0)}=\delta_{fn}, \quad S_{in}^{(0)*}=\delta_{in} \tag{4.46}$$

式(4.45b) により，λ の 1 次までのユニタリー性の関係式は次のように表される．

$$i\int_{-\infty}^{\infty}dt\langle i|H_{\rm I}(t)|f\rangle^* - i\int_{-\infty}^{\infty}dt\langle f|H_{\rm I}(t)|i\rangle=0 \tag{4.47}$$

上式は $H_{\rm I}$ がエルミートであれば成立する．

式(4.45c) に進む前に，$S^{(2)}$ に関する非常に重要な恒等式を証明しておく．

$$\begin{aligned}S^{(2)}&=(-i)^2\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{t_1}dt_2H_{\rm I}(t_1)H_{\rm I}(t_2) \qquad \text{[第 1 形式]}\\ &=(-i)^2\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{t_1}^{\infty}dt_2H_{\rm I}(t_2)H_{\rm I}(t_1) \qquad \text{[第 2 形式]}\end{aligned} \tag{4.48}$$

これを証明するために，第 1 式を積分変数を入れ換えて書き直す．

$$S^{(2)}=(-i)^2\int_{-\infty}^{\infty}dt_2\int_{-\infty}^{t_2}dt_1H_{\rm I}(t_2)H_{\rm I}(t_1) \tag{4.49}$$

この式ではまず t_2 を固定して t_1 について $-\infty$ から t_2 までの積分を実行し，それから t_2 について $-\infty$ から ∞ までの積分を実行することが求められる．これは図

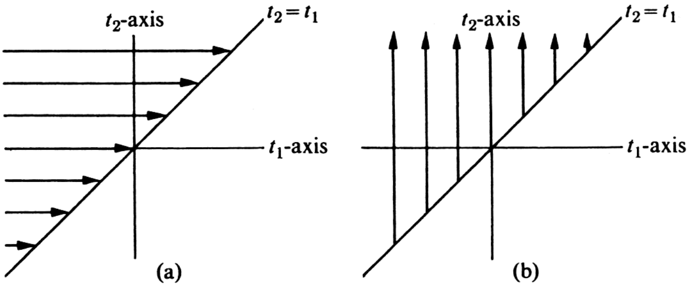


図4.1　式(4.49) と式(4.50) の積分領域.

4.1(a) に示すように，2次元の t_1t_2 面において，直線 $t_2=t_1$ の上側の領域において $H_I(t_2)H_I(t_1)$ を積分しなければならないことを意味する．しかし図4.1(b) を見れば明らかなように，式(4.49) を次のように書いても同じことである．

$$S^{(2)}=(-i)^2\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{t_1}^{\infty}dt_2H_I(t_2)H_I(t_1) \tag{4.50}$$

これで式(4.48) は証明された．我々は式(4.48) の1行目と2行目を，$S^{(2)}$ の"第1形式"(Form 1) および"第2形式"(Form 2) と呼ぶことにする．

この $S^{(2)}$ に関する重要な恒等式と式(4.47) を用いると，λ の2次のユニタリー性の関係式(4.45c) を証明するためには，次式を証明すればよいことが分かる．

$$\begin{aligned}&\sum_n\int_{-\infty}^{\infty}dt\langle f|H_I(t)|n\rangle\int_{-\infty}^{\infty}dt\langle n|H_I(t)|i\rangle\\&=-(-i)^2\left[\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{t_1}^{\infty}dt_2\langle i|H_I(t_2)H_I(t_1)|f\rangle^*+\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{t_1}dt_2\langle f|H_I(t_1)H_I(t_2)|i\rangle\right]\end{aligned} \tag{4.51}$$

ここでは式(4.45c) の $S_{in}^{(2)*}$ には"第2形式"を，$S_{fn}^{(2)}$ には"第1形式"を充てた．$H_I(t)$ のエルミート性を利用し，$H_I(t_1)$ と $H_I(t_2)$ の間に中間状態の完全系 $\sum_n|n\rangle\langle n|=1$ を挿入すると，右辺が次のようになることが分かる．

$$\sum_n\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\left[\int_{t_1}^{\infty}dt_2+\int_{-\infty}^{t_1}dt_2\right]\langle f|H_I(t_1)|n\rangle\langle n|H_I(t_2)|i\rangle \tag{4.52}$$

これはすでに式(4.51) の左辺と同じである．この方法を一般化して，式(4.43a) に示

した意味で，S行列のユニタリー性をすべての (有限の) 次数まで証明することが可能である．式(4.43b) も同様に証明できる．

2次までのユニタリー性を証明したが，ユニタリー性の物理的な重要性を理解するために，遷移確率の解釈を考えてみる．系が $t=-\infty$ において状態 i にあるものと想定しよう．式(4.32) により，$t=\infty$ において系がある特定の終状態 f にあることを見いだす確率は $|S_{fi}|^2$ によって与えられる．$t\to\infty$ において“すべての可能な”終状態を考えるならば，それらの確率の総和は1にならなければならない．

$$\sum_f |S_{fi}|^2 = 1 \tag{4.53}$$

この要請はS行列がユニタリーであれば保証される．第3章において強調したように，相対論的な量子力学において，ある粒子を全空間内において見いだす確率は一定ではなく，粒子は自由に生成したり消滅したりする．たとえば始状態として $e^+ + e^-$，それぞれの運動量を $\mathbf{p}$ および $-\mathbf{p}$ の状態を想定すると，可能な終状態は $e^+ + e^-$，$\mathbf{p}'$ および $-\mathbf{p}'$ だけではなく，2γ 状態，3γ 状態，$e^+ + e^- + \gamma$ 状態などもあり得る．しかしながら確率保存の性質は，式(4.53) のような意味において保持される．すなわち終状態に含まれる粒子の種類や数に制約を与えずに，始状態からエネルギー保存を満たして遷移することのできるあらゆる状態の確率をすべて考慮するならば，確率の総和は保存する．

S行列のユニタリー性を証明する上で，相互作用ハミルトニアンのエルミート性が重要な役割を果たしたことを強調しておく．しかしこれとは逆に式(4.47) に基づいて，確率保存の性質から，場の量子論において相互作用密度のエルミート性が要請されるという論じ方もできる．つまり議論の出発点を一般的な確率保存，すなわちユニタリー性の要請にしてもよい．$S^{(1)}$ が $-i$ と H_I の時間積分の積によって与えられると仮定して，$S^{(2)}$ がユニタリー性を満たすためにはどうすればよいかと問うこともできる．このような方法に従い，S行列のユニタリー性などの少数の一般原理だけを仮定してS行列展開を導くことも可能である．このアプローチはN. N. Bogoliubov（ボゴリューボフ）とその共同研究者たちによって提唱された方法で，ラグランジアンやハミルトニアンを出発点とする通常の考え方とは異なる興味深い観点を与えるものであるが，本書ではこれ以上たち入らない[2]．

式(4.38) によって定義されるT行列を考えると，S行列のユニタリー性から次の関係式が得られる．

$$i(T_{fi} - T^*_{if}) = 2\pi \sum_n \delta(E_f - E_n) T^*_{nf} T_{ni} \tag{4.54}$$

[2] Bogoliubov and Shirkov (1959), pp.206-226 を参照．

この関係に基づいて，全断面積と前方散乱振幅の虚部を関係づける光学定理を導くことができる (式(2.219)参照)．式(4.54) からこの重要な定理を導く方法は，多くの非相対論的な量子力学の教科書で扱われているので，ここでは説明を省く[3)]．

ユニタリー性の原理の少々難しい応用例を 4.7節で扱う予定である．そこでは式(4.45c) を用いて真空偏極と外場による対(つい)生成を関係づけることになる．

4.3 1次の過程；Mott散乱とハイペロンの崩壊

電子散乱の行列要素 前節において展開したS行列による形式を，具体的な問題に適用してみる．まず相対論的量子力学における最も簡単な問題として，量子化されていない外部ポテンシャルによる相対論的な電子の散乱を考える．この問題は初等的に，通常のBorn(ボルン)近似の方法で扱うことも可能であるが (3.5節)，ここでは敢えて場の量子論の言葉でこの問題を扱い，より複雑な問題に対しても有用となる技法や形式のいくつかを説明してみる．

量子化していない Dirac理論と同様に，相互作用密度を次のように置く．

$$\mathcal{H}_{\mathrm{int}} = -ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu^{(\mathrm{e})} \tag{4.55}$$

$A_\mu^{(\mathrm{e})}$ は量子化されていない外部ポテンシャルを表す．たとえば無限に重い (位置の変動を無視できる) 原子核から生じている時間に依存しないCoulomb(クーロン)ポテンシャルを考える場合には，$A_\mu^{(\mathrm{e})}(x)$ を，

$$\mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad A_4 = -i\frac{eZ}{4\pi r} \tag{4.56}$$

とする．あるいは時間に依存して振動する3次元ベクトルポテンシャルを外場として考えるのであれば，たとえば，

$$\mathbf{A} = (0, 0, a\cos\omega t), \quad A_4 = 0 \tag{4.57}$$

のようにすればよい (ここでは a を時空座標に依存しない定数と考える)．式(4.55) は既に見慣れているが，$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ の含意に少し注意を払う必要がある．まず式(3.417) に従って，電子場を分解してみる．

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\gamma_\mu\psi &= \left(\bar{\psi}^{(+)} + \bar{\psi}^{(-)}\right)_\alpha (\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\left(\psi^{(+)} + \psi^{(-)}\right)_\beta \\ &= (\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\left(\bar{\psi}_\alpha^{(+)}\psi_\beta^{(+)} + \bar{\psi}_\alpha^{(-)}\psi_\beta^{(+)} + \bar{\psi}_\alpha^{(+)}\psi_\beta^{(-)} + \bar{\psi}_\alpha^{(-)}\psi_\beta^{(-)}\right)\end{aligned} \tag{4.58}$$

3) Merzbacher (1951), pp.495-499 ; Messiah (1962), p.866.

3.10節において説明したように，電荷電流密度の演算子は，その真空期待値がゼロになるように構築する必要がある．式(4.58) は，第3項について $\langle\bar{\psi}_\alpha^{(+)}\psi_\beta^{(-)}\rangle_0$ がゼロにならないので§，この要請を満たさない．しかるに式(4.58) と c-数 $(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\{\bar{\psi}_\alpha^{(+)},\psi_\beta^{(-)}\}$ だけ異なる，

$$(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\left(\bar{\psi}_\alpha^{(+)}\psi_\beta^{(+)}+\bar{\psi}_\alpha^{(-)}\psi_\beta^{(+)}-\psi_\beta^{(-)}\bar{\psi}_\alpha^{(+)}+\bar{\psi}_\alpha^{(-)}\psi_\beta^{(-)}\right) \tag{4.59}$$

を考えれば，$\bar{\psi}^{(+)}$ が真空に作用するとゼロになるので，真空期待値をゼロにするという要請を満たす．文献によっては式(4.58) と式(4.59) を区別するために，後者に両側をコロンで括った $:\bar{\psi}\gamma_\mu\psi:$ という表記を充てているものもある．しかし我々はこの記法を採用せず，曖昧さが生じ得る場合には $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ を式(4.58) ではなく，常に式(4.59) のように解釈することに決めておく．式(4.59) の物理的な意味は既に 3.10節で論じた通りである．第1項は電子-陽電子対(つい)を消滅させる．第2項は電子を消滅させてから電子を生成するので電子の散乱を記述する．第3項は陽電子を消滅させてから陽電子を生成する (陽電子散乱)．第4項は電子-陽電子対を生成する．これらの4通りの過程を模式的に図3.8 (p.194) に示してある．

始状態 i から，ある特定の終状態 f へ遷移する振幅を計算するために，$S_{fi}-\delta_{fi}$ を考える必要がある．S行列の最初の項 $S^{(0)}=1$ は“新たなこと”が何も起こらない物理状況に対応するので，“遷移”の評価では δ_{fi} の減算を入れておく．ゼロにならない最低次の項だけを考慮するならば $S_{fi}-\delta_{fi}$ は $S^{(1)}$ なので，ここでは，

$$S_{fi}^{(1)}=-i\left\langle\Phi_f\left|-ie\int d^4x\,\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu^{(e)}\right|\Phi_i\right\rangle \tag{4.60}$$

を考える．4次元積分は全空間および全時間にわたって行う．我々が扱う問題では Φ_i は $p=(\mathbf{p},iE)$ でスピン s の電子がひとつある状態である．Φ_f も電子がひとつある状態であり，その状態を $p'=(\mathbf{p}',iE')$，s' と置く．それぞれの1電子状態に対応する生成演算子を $b^\dagger$ および $b'^\dagger$ と表すならば，始状態と終状態は次のように表される†．

$$\Phi_i=b^\dagger|0\rangle,\quad \Phi_f=b'^\dagger|0\rangle \tag{4.61}$$

§(訳註) 確認しておくと $\psi^{(+)}$ は電子消滅，$\bar{\psi}^{(+)}$ は陽電子消滅，$\psi^{(-)}$ は陽電子生成，$\bar{\psi}^{(-)}$ は電子生成の作用を持つ．式(3.418)参照．消滅演算子 ((+)演算子) が右側にあるか，もしくは生成演算子 ((−)演算子) が左側にあるならば真空期待値はゼロになるので，他の3つの項はゼロになる．

†(訳註) 本章全体にわたり $|0\rangle$ は非摂動ハミルトニアンの基底状態を表しているが，全ハミルトニアンの下で安定な固有状態 (基底状態や，許容される粒子・準粒子) を考察せずに非摂動ハミルトニアンの固有状態の形で始状態や終状態を天下りに与えること (式(4.61)や次節の2光子放射型 e^-e^+ 対消滅における式(4.139)など) は必ずしも自然な手続きではない．ここでは単独の散乱現象などを扱う場合の常套的な論法として $t\to\pm\infty$ では系に含まれる粒子間の距離や粒子-散乱中心の距離が充分に離れていて相互作用摂動ハミルトニアン (摂動項) が系の状態にほとんど影響を及ぼさないと想定されるために，相互作用密度を $\mathcal{H}_{\rm int}\to\mathcal{H}_{\rm int}e^{-\alpha|t|}$ (α は微小な正数) のように置き換えて散乱問題を扱ってもよいという仮定を暗に導入しているのであ

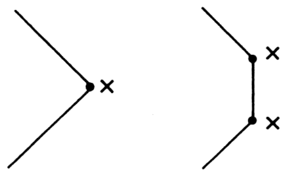


図4.2 外部ポテンシャルによる電子の散乱過程.

式(4.59) の4つの項の中で，$\bar{\psi}_\alpha^{(-)}\psi_\beta^{(+)}$ だけが寄与を持つことは直観的に明らかである．これを厳密に証明することもできる．たとえば $\bar{\psi}_\alpha^{(+)}\psi_\beta^{(+)}$ を考えてみると，典型的な行列要素は，生成演算子と消滅演算子という観点で見れば $\langle 0|b'db''b^\dagger|0\rangle$ のような形になる．ここでは $\psi_\beta^{(+)}$ が含む典型的な演算子を b'' と表し，$\bar{\psi}_\alpha^{(+)}$ が含む典型的な陽電子消滅演算子を d と表している．真空に d を作用させるとゼロになるので，

$$\langle 0|b'db''b^\dagger|0\rangle = \langle 0|b'b''b^\dagger d|0\rangle = 0 \tag{4.62}$$

である．このような事情から，ここでは $\bar{\psi}_\alpha^{(-)}\psi_\beta^{(+)}$ の項だけを考慮すれば充分である．さらには $\psi^{(+)}$ を $\sqrt{m/EV}\,bu^{(s)}(\mathbf{p})e^{ip\cdot x}$ で置き換え，$\bar{\psi}^{(-)}$ を $\sqrt{m/E'V'}\,b'^\dagger u^{(s')}(\mathbf{p}')$ $e^{-ip'\cdot x}$ で置き換えることが許される．これを厳密に証明するために $\psi^{(+)}$ および $\bar{\psi}^{(-)}$ に含まれる典型的な消滅・生成演算子をそれぞれ b'' および $b'''^\dagger$ と表すことにしよう．考えなければならないのは，

$$\langle 0|b'b'''^\dagger b''b^\dagger|0\rangle = \langle 0|\{b', b'''^\dagger\}\{b'', b^\dagger\}|0\rangle \tag{4.63}$$

のような行列要素であるが，$\psi^{(+)}$ ($\bar{\psi}^{(-)}$) に含まれる消滅演算子 (生成演算子) の運動量とスピンの添字が，始状態 (終状態) において存在する電子のそれと一致しないものについてはゼロになる．したがって場の量子論の見地において，外部ポテンシャルによる電子散乱の最低次の過程は，ポテンシャル $A_\mu^{(e)}$ が作用する時空点において，入射電子の消滅と散乱電子の生成が同時に起こる現象として捉えられる．これを模式

る．すなわち計算上の便法として，始状態・終状態を設定する $t\to\pm\infty$ において [全ハミルトニアン] = [非摂動ハミルトニアン] と考えている．しかし着目する実粒子の挙動だけから相互作用項の影響の有無を推定するこの論法 (つまり相互作用項の基底状態自体および粒子 [準粒子] の演算子に対する影響を無視している) は，一般論として疑義が無いわけではない．たとえば金属電子系の超伝導理論では常伝導基底状態 (非摂動ハミルトニアン基底状態) と BCS 基底状態 (全ハミルトニアン基底状態) が全く異なり，安定な素励起 (準粒子) の素性も異なるという顕著な実例があるのだが，量子電磁力学的な問題に関しては上述の仮定が結果的に是認される．

的に表現すると図4.2(a) のようになる．これに対して (ここでは考察しないが) 2次の散乱振幅は図4.2(b) のように表される．

b'' と $b^\dagger$ の運動量とスピンの添字が一致する場合には，式(4.63) における反交換子 $\{b'', b^\dagger\}$ は1になる．$\{b', b'''^\dagger\}$ についても同様である．したがって外部ポテンシャルによる1次の散乱の一般式として，次式が得られる．

$$S_{fi}^{(1)} = -e\int d^4x \left[\sqrt{\frac{m}{E'V}}\,\bar{u}^{(s')}(\mathbf{p}')e^{-ip'\cdot x}\right]\gamma_\mu\left[\sqrt{\frac{m}{EV}}\,u^{(s)}(\mathbf{p})e^{ip\cdot x}\right]A_\mu^{(e)}(x) \tag{4.64}$$

今，問題を Coulomb ポテンシャル(4.56) による散乱 (Mott(モット)散乱) に特定し，$\bar{u}^{(s')}(\mathbf{p}')$ および $u^{(s)}(\mathbf{p})$ をそれぞれ $\bar{u}'$ および u と略記すると，S行列は次のように表される．

$$S_{fi}^{(1)} = -2\pi i\delta(E-E')\left[-\frac{m}{EV}\frac{Ze^2}{|\mathbf{p}'-\mathbf{p}|^2}\bar{u}'\gamma_4 u\right] \tag{4.65}$$

上式の導出には，次の計算を用いた‡．

$$\begin{aligned}\int d^4x\, A_4^{(e)} e^{i(p-p')\cdot x} &= 2\pi\delta(E-E')\int d^3x\left(-i\frac{Ze}{4\pi r}\right)e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} \\ &= -2\pi i\delta(E-E')\frac{Ze}{|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|^2}\end{aligned} \tag{4.66}$$

式(4.64) および式(4.65) として得た1次のS行列は，同じ問題を初等的な Born 近似 (3.5節参照) によって解いた場合のS行列と正確に一致している．

遷移頻度は $|S_{fi}^{(1)}|^2$ を式(4.33) における $t-t_0$ に相当する時間で割ったものである．式(4.65) をそのまま自乗すると，エネルギー保存を表すデルタ関数の自乗が現れる．この意味は $t=T/2$，$t_0=-T/2$ と置いて $T\to\infty$ の極限を取る前の形を考えれば理解できる．式(4.65) に含まれるデルタ関数の実際の意味は，

$$\delta(E'-E) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} e^{i(E-E')t_1}dt_1 \tag{4.67}$$

であり，$E'-E=0$ における値を極限操作の前に考えると $T/2\pi$ である (すなわち $2\pi\delta(E=0)=\lim_{T\to\infty}T$)．そこで，次のように見なす[4)]．

‡(訳註) r の積分は，次のように微小量 ϵ を入れて収束させておく．

$$\int_0^\infty\left(e^{i|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|r}-e^{-i|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|r}\right)dr = \lim_{\epsilon\to+0}\int_0^\infty\left(e^{i\{|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|+i\epsilon\}r}-e^{-i\{|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|-i\epsilon\}r}\right)dr$$

4) 式(4.68) を“厳密に”証明すると，次のようになる (式(2.115)を用いる)．

$$|\delta(E'-E)|^2 = \lim_{T\to\infty}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2}e^{i(E'-E)t}dt\right|^2 = \lim_{T\to\infty}\left|\frac{\sin[(E'-E)T/2]}{\pi(E'-E)}\right|^2 = \frac{T}{2\pi}\delta(E'-E)$$

$$|2\pi\delta(E'-E)|^2 = 2\pi T\delta(E'-E) \quad \left(\Leftrightarrow |\delta(E'-E)|^2 = \frac{T}{2\pi}\delta(E'-E)\right) \tag{4.68}$$

この関係によれば，遷移頻度 $|S_{fi}|^2/T$ は T に依存しないように見える．立体角要素 $d\Omega$ への散乱に対応する断面積要素を得るために，$|S_{fi}|^2/T$ に運動量空間の状態密度因子を掛けて入射流束密度 $|\mathbf{p}|/EV$ で割り[§]，積分要素 d^3p' に変換を施す．

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{|S_{fi}|^2}{T}\left[\frac{V d^3p'}{(2\pi)^3}\right]\left(\frac{EV}{|\mathbf{p}|}\right) \\ &= \frac{Z^2e^4}{4\pi^2}\frac{m^2}{E|\mathbf{p}|}\frac{|\bar{u}'\gamma_4 u|^2}{|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|^4}\delta(E'-E)\,d^3p' \\ &= \frac{Z^2e^4m^2}{4\pi^2}\frac{|\bar{u}'\gamma_4 u|^2}{|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|^4}d\Omega = \frac{4Z^2\alpha^2m^2|\bar{u}'\gamma_4 u|^2}{|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|^4}d\Omega \end{aligned} \tag{4.69}$$

積分要素の変換には，次の関係を用いた[†]．

$$d^3p'\,\delta(E'-E) = \frac{|\mathbf{p}|^2}{\partial E/\partial|\mathbf{p}|}d\Omega = |\mathbf{p}|E\,d\Omega \tag{4.70}$$

ここでは (デルタ関数により) $|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}|$ である．

スピンの和と電子-射影演算子　Coulombポテンシャルによる散乱断面積を求める問題は，式(4.69) において $|\bar{u}'\gamma_4 u|^2$ を求める問題に帰着した．ある運動量-スピン状態から，別の運動量-スピン状態への遷移の計算に，3.11節で弱い相互作用を論じた際と同様に，自由粒子スピノルの具体的な形を適用してもよい．しかしながら通常の実験ではスピンの向きを関知せずに，運動量の角度分布だけを観測するので，スピン状態を特定した遷移頻度は関心の対象とならない．その場合には終状態におけるスピン状態に関して和をとる必要がある．スピン状態に関する和の計算は H. Casimir（カシミール）によって導入された技法を用いて簡単に行うことができる．まず $|\bar{u}'\gamma_4 u|^2$ の意味が，

$$\begin{aligned} |\bar{u}'\gamma_4 u|^2 &= \left((u'^\dagger\gamma_4)\gamma_4 u\right)^\dagger(\bar{u}'\gamma_4 u) = u^\dagger\gamma_4\gamma_4 u'\bar{u}'\gamma_4 u \\ &= \bar{u}_\delta(\gamma_4)_{\delta\gamma}u'_\gamma\bar{u}'_\beta(\gamma_4)_{\beta\alpha}u_\alpha \end{aligned} \tag{4.71}$$

であることを確認しよう．したがってスピンの和 $\sum_{s'=1}^{2} u_\gamma^{(s')}(\mathbf{p}')\,\bar{u}_\beta^{(s')}(\mathbf{p}')$ を評価しなければならない．これを行うために，次のような関係を利用する．

$$\sum_{s=1}^{2} u_\alpha^{(s)}(\mathbf{p})\,\bar{u}_\beta^{(s)}(\mathbf{p}) = \left[\frac{-i\gamma\cdot p + m}{2m}\right]_{\alpha\beta} \qquad [\text{電子-射影演算子}] \tag{4.72}$$

[§] (訳註) [流束密度] = [粒子密度] × [粒子速度] = $(1/V)(c^2|\mathbf{p}|/E)$．自然単位系なので c を省く．粒子速度については p.139訳註参照．

[†] (訳註) 運動量空間の積分の変換については p.206-207訳註参照．積分変数を運動量空間内の極座標に変更し，動径方向の積分を実行するという手続きの結果を集約して表すと式(4.70)のようになる．$|\mathbf{p}|$ はデルタ関数の引数 $E'-E$ をゼロにするような $|\mathbf{p}|$ の値を表す．

上式の証明は次のようになされる．まず静止している電子を表す自由粒子スピノルについては，次のようになる．

$$\sum_{s=1}^{2} u_\alpha^{(s)}(\mathbf{0})\bar{u}_\beta^{(s)}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_\beta + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_\beta$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\beta} = \left[\frac{\gamma_4 + 1}{2}\right]_{\alpha\beta} = \left[\frac{m\gamma_4 + m}{2m}\right]_{\alpha\beta} \tag{4.73}$$

ここで3.4節で扱った，静止した電子を等速推進(ブースト)させる“逆の”Lorentz(ローレンツ)変換を考えよう(式(3.165)参照)．

$$\begin{aligned} u^{(s)}(\mathbf{0}) &\rightarrow u^{(s)}(\mathbf{p}) = S_{\mathrm{Lor}}^{-1} u^{(s)}(\mathbf{0}) \\ \bar{u}^{(s)}(\mathbf{0}) &\rightarrow \bar{u}^{(s)}(\mathbf{p}) = \bar{u}^{(s)}(\mathbf{0})\, S_{\mathrm{Lor}} \end{aligned} \tag{4.74}$$

式(4.73)に左から S_{Lor}^{-1} を，右から S_{Lor} を掛けて次の関係を利用すると(式(3.139)参照)，式(4.72)が得られる．

$$S_{\mathrm{Lor}}^{-1}\gamma_4 S_{\mathrm{Lor}} = \gamma_4 \cosh\chi - i\boldsymbol{\gamma}\cdot\hat{\mathbf{p}} \sinh\chi = \frac{-i\gamma\cdot p}{m} \tag{4.75}$$

行列(4.72)は一般の4成分スピノルから電子スピノル成分を抽出する(陽電子成分を省く)射影演算子と見なすことができる．すなわちこれを $u^{(s)}(\mathbf{p})$ に作用させるとそのまま $u^{(s)}(\mathbf{p})$ が得られ，陽電子スピノル $v^{(s)}(\mathbf{p})$ に作用させるとゼロになる．このことは式(3.391)から明らかである．式(4.72)と類似の陽電子スピノルに関する関係，

$$\sum_{s=1}^{2} v_\alpha^{(s)}(\mathbf{p})\bar{v}_\beta^{(s)}(\mathbf{p}) = -\left[\frac{i\gamma\cdot p + m}{2m}\right]_{\alpha\beta} \qquad \text{[陽電子-射影演算子]} \tag{4.76}$$

を証明することも難しくない‡．p は“物理的な”陽電子状態の運動量-エネルギー4元ベクトルである(負エネルギー電子のそれではない)．次の関係に注意されたい．

‡(訳註) 電子および陽電子のスピノルが従う方程式 $(+i\gamma\cdot p + m)u = 0$，$(-i\gamma\cdot p + m)v = 0$ (式(3.388)) と射影演算子(4.72)および(4.76)を比べてみると，方程式においてスピノルに作用する演算子 $i\gamma\cdot p$ と m の符号の相対関係を逆転させることで，解の射影が抽出されるという事情を見て取ることができる．$-i\gamma\cdot p$ の固有値 $\pm m$ の正／負が電子／陽電子に対応する．

$$\sum_{s=1}^{2}\left[u_\alpha^{(s)}(\mathbf{p})\bar{u}_\beta^{(s)}(\mathbf{p}) - v_\alpha^{(s)}(\mathbf{p})\bar{v}_\beta^{(s)}(\mathbf{p})\right] = \delta_{\alpha\beta} \tag{4.77}$$

(これを p.222, 問題3-13 と比較してみよ.)

Mott散乱(電子-Coulomb場散乱)の断面積 電子の Coulomb散乱の問題に戻ろう. 入射する電子は非偏極であるものと仮定する. したがって再び Casimir の技法を用いて始状態のスピンに関する和をとり, 2で割って平均化しておく必要がある. よって次の量を考える.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_s\sum_{s'}|\bar{u}'\gamma_4 u|^2 &= \frac{1}{2}\sum_s\sum_{s'}\bar{u}_\delta^{(s)}(\mathbf{p})(\gamma_4)_{\delta\gamma}u_\gamma^{(s')}(\mathbf{p}')\,\bar{u}_\beta^{(s')}(\mathbf{p}')(\gamma_4)_{\beta\alpha}u_\alpha^{(s)}(\mathbf{p})\\ &= \frac{1}{2}(\gamma_4)_{\delta\gamma}\left(\frac{-i\gamma\cdot p'+m}{2m}\right)_{\gamma\beta}(\gamma_4)_{\beta\alpha}\left(\frac{-i\gamma\cdot p+m}{2m}\right)_{\alpha\delta}\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\gamma_4\left(\frac{-i\gamma\cdot p'+m}{2m}\right)\gamma_4\left(\frac{-i\gamma\cdot p+m}{2m}\right)\right]\\ &= \frac{1}{8m^2}\mathrm{Tr}\left[(-i\gamma\cdot p''+m)(-i\gamma\cdot p+m)\right]\end{aligned} \tag{4.78}$$

Tr は“対角和(トレース)”(対角要素の総和) を意味し, p'' は次のように定義してある[§].

$$p''_k = -p'_k, \quad p''_4 = p'_4 \tag{4.79}$$

この種の対角和(トレース)を評価する際に, 一般の4元ベクトル a_μ と b_μ について成立するガンマ行列の次の公式が有用である.

$$\mathrm{Tr}\left[(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot b)\right] = \mathrm{Tr}\left[(\gamma\cdot b)(\gamma\cdot a)\right] = 4a\cdot b \tag{4.80}$$

この公式は, 次の関係から容易に証明される.

$$(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot b)+(\gamma\cdot b)(\gamma\cdot a) = \gamma_\mu a_\mu\gamma_\nu b_\nu + \gamma_\nu b_\nu\gamma_\mu a_\mu = 2\delta_{\mu\nu}a_\nu b_\mu = 2a\cdot b \tag{4.81}$$

$$\mathrm{Tr}(1) = 4 \tag{4.82}$$

ガンマ行列は対角和(トレース)がゼロなので, $\mathrm{Tr}(\gamma\cdot p)$ のような項はゼロである. また一般に, 奇数個のガンマ行列の積の対角和(トレース)はゼロである. このことは γ_5 を用いてエレガントに証明できる. γ_5 は γ_μ $(\mu = 1,2,3,4)$ の何れとも反交換し, $\gamma_5^2 = 1$ なので, 証明は次のように与えられる.

---

§(訳註) 式(4.78) の3行目の Tr括弧内で, 中央の γ_4 を交換関係(3.36a) を利用して前の方に移行させる際に, $\gamma\cdot p'$ の空間成分の部分は $\gamma_k\gamma_4 p'_k = -\gamma_4\gamma_k p'_k$ のように符号が反転する. p' の空間成分にこの負号を加えた形で p'' を定義している.

$$\mathrm{Tr}(\overbrace{\gamma_\mu\gamma_\nu\cdots\gamma_\sigma\gamma_\rho}^{\text{odd number}}) = \mathrm{Tr}(\gamma_5^2\gamma_\mu\gamma_\nu\cdots\gamma_\sigma\gamma_\rho)$$
$$= \mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\cdots\gamma_\sigma\gamma_\rho\gamma_5)$$
$$= -\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu\cdots\gamma_\sigma\gamma_\rho) \tag{4.83}$$

式(4.78) において，式(4.80) や $E^2 = |\mathbf{p}|^2 + m^2$ の関係などを用いると，次のようになる．

$$\frac{1}{2}\sum_s\sum_{s'}|\bar{u}'\gamma_4 u|^2 = \frac{1}{8m^2}\left(-4p''\cdot p + 4m^2\right) = \frac{1}{8m^2}\left(4\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}' + 4E^2 + 4m^2\right)$$
$$= \frac{1}{2m^2}\left\{2E^2 - |\mathbf{p}|^2(1-\cos\theta)\right\}$$
$$= \frac{E^2}{m^2}\left(1 - \frac{|\mathbf{p}|^2}{E^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{4.84}$$

上で得た結果†を式(4.69) に適用すると，非偏極電子が Coulombポテンシャルに散乱される Mott散乱の微分断面積が，次のように与えられる．

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{1}{4}(Z\alpha)^2\frac{E^2}{|\mathbf{p}|^4\sin^4(\theta/2)}\left(1 - \beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{4.85}$$

上式を得るために，次の関係を利用した．

$$|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|^2 = 4|\mathbf{p}|^2\sin^2\frac{\theta}{2},\quad \beta = \frac{|\mathbf{p}|}{E} \tag{4.86}$$

式(4.85) において $v \to 0$ $(\beta \to 0)$ の極限を考えると‡，次の有名なRutherford(ラザフォード)散乱の断面積の式が得られる[5)]．

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{1}{4}\frac{(Z\alpha)^2}{m^2v^4\sin^4(\theta/2)} \tag{4.87}$$

電子ではなく，荷電Klein-Gordon(クライン ゴルドン)粒子が Coulombポテンシャルに散乱される断面積も読者は容易に求めることができるが，この場合には式(4.85) において $\beta^2\sin^2(\theta/2)$ の項を省いた形の式が与えられる．

---

†(訳註) 自由スピノル u の規格化因子が Lorentz収縮による高密度化を考慮した $|E|/mc^2$ なので (式(3.110)．ここでは $c \to 1$)，$\bar{u}'$ と u に起因するこの因子の自乗が式(4.84) の最後の行で主因子として現れている．ただしこれはS行列を算出する際に，波動関数の中で打ち消されて最終的な計算結果には影響を及ぼさない因子なので (式(4.60)，式(4.64))，むしろこれを除いた $(1-\beta^2\sin^2(\theta/2))$ が $\mathcal{H}_{\mathrm{int}}$ (式(4.55)) における γ_4 の寄与の本質を表している．すなわち高速電子 $(\beta \to 1)$ の大角度 $(\theta \to \pi)$ の遷移は，外部ポテンシャル A_4 の影響とはまた別に，電子自体の Dirac粒子としての性質によって抑制される．

‡(訳註) 自然単位系では，当然ながら速度 v と規格化速度 $\beta = v/c$ の区別がなくなる．$|\mathbf{p}|/E$ を速度 $v = c^2|\mathbf{p}|/E$ と見ても，規格化速度 $\beta = c|\mathbf{p}|/E$ と見てもよい．$|\mathbf{p}| = Ev = E\beta$.

5) Goldstein (1951), p.84 ; Merzbacher (1961), p.228.

ここで扱った問題は1929年にN. F. Mott(モット)によって論じられたが，彼は摂動論によらず，W. Gordon と C. G. Darwin が得ていた $E > m$ の Coulomb波動関数 (超幾何関数を含んでいる) を用いて問題を解いた．Coulomb場による相対論的な粒子の散乱は一般に彼の仕事に因んで Mott散乱と呼ばれている[6)]．ここで採用した摂動論による取扱いは，エネルギーが充分に高く，比較的 Z が小さい (点状原子核モデルが妥当な) 場合には，原子核Coulomb場による電子散乱に適用できる．数式的に表すと，式(4.85) が成立する条件は $Z/(137\beta) \ll 1$ である．

有限範囲の電荷分布　原子核のポテンシャルを上述のように $A_4 = -iZe/4\pi r$ と置くならば，原子核が点状であることを暗黙のうちに仮定していることになる．ここでは高エネルギー領域において，有限範囲に拡がった原子核の寸法を調べるために大角度のMott散乱が利用できることを示す．原子核の電荷分布を $\rho(\mathbf{x})$ と表すと，点状原子核による $1/r$型のポテンシャルは，次のように修正される．

$$-\frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x}|} \rightarrow \frac{1}{4\pi}\int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{4.88}$$

散乱前後の電子の運動量の変化を $\mathbf{q}$ と表すことにする．

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p} \tag{4.89}$$

式(4.66) に対応するポテンシャル積分の式は，次のようになる．

$$\begin{aligned}\int d^4x A_4 e^{i(p-p')\cdot x} &= 2\pi i\delta(E'-E)\int d^3x \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \\ &= 2\pi i\delta(E'-E)\int d^3x' e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}'}\rho(\mathbf{x}')\int d^3x \frac{e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \\ &= -2\pi i\delta(E'-E)\frac{Ze}{|\mathbf{q}|^2}F(\mathbf{q})\end{aligned} \tag{4.90}$$

ここで導入した $F(\mathbf{q})$ は原子核の“形状因子”(form factor) と呼ばれ，次式のように電荷分布の空間的なFourier(フーリエ)変換によって定義される．

$$F(\mathbf{q}) = -\frac{1}{Ze}\int \rho(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}d^3x \tag{4.91}$$

点状原子核のモデルでは $\rho(\mathbf{x}) = -Ze\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ であり，$F(\mathbf{q})$ は恒等的に1になるので，上式は既に得ている結果と整合している．拡がった電荷の Coulomb場による微分断面積が，次のように与えられることは明らかである．

[6)] Mott散乱の非摂動論的な取扱いに関心のある読者は，Mott and Massey (1949), pp.78-84 を参照されたい．

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}\right)_{\text{point}} |F(\mathbf{q})|^2 \tag{4.92}$$

ここで $(d\bar{\sigma}/d\Omega)_{\text{point}}$ は式(4.85) を意味する．もし $|\mathbf{q}|^2 = 4|\mathbf{p}|^2 \sin^2(\theta/2)$ が大きすぎなければ，式(4.91) を次のように展開できる．

$$\begin{aligned} F(\mathbf{q}) &= -\frac{1}{Ze}\int\left(1 - i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} - \frac{(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x})^2}{2} + \cdots\right)\rho(\mathbf{x})d^3x \\ &= 1 - \frac{\langle r^2 \rangle}{6}|\mathbf{q}|^2 + \cdots \end{aligned} \tag{4.93}$$

上式では $\rho(\mathbf{x})$ が球対称であることを仮定した．(電荷分布が球対称であれば $F(\mathbf{q})$ が $|\mathbf{q}|^2$ だけに依存することは明らかである．) 形状因子の展開式(4.93) に現れた次の量，

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\displaystyle\int r^2 \rho(\mathbf{x})\, d^3x}{\displaystyle\int \rho(\mathbf{x})\, d^3x} \tag{4.94}$$

は“平均自乗半径”(mean square radius) と呼ばれる．R. Hofstadter(ホフシュタッター) とその共同研究者たちは式(4.92) と式(4.93) を利用して，実験的に原子核の寸法を推定した．

ヘリシティの変化；スピン-射影演算子　微分断面積の式(4.85) を導く際に，入射する電子が非偏極であることを仮定した．Casimir の対角和(トレース)の技法を習得すると，最終的な式(4.85) に容易に到達できることが分かったが，電子が散乱されるときにスピンの向きがどのように変わるかを調べることも教育的には有意義である．この理由から，決まったヘリシティを持つ状態の間でS行列の要素を求めてみよう．m/E や $1/|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|^2$ のような因子は前と同じであるが，今度は $\bar{u}'\gamma_4 u$ において u や u' をヘリシティの固有スピノルとする．運動量が $\mathbf{p}$ でヘリシティが $+1$ および -1 の自由粒子スピノルをそれぞれ $u^{(+)}(\mathbf{p})$ および $u^{(-)}(\mathbf{p})$ と書くことにする．z 軸を始状態の運動量 $\mathbf{p}$ の方向に取るならば，もちろん $u^{(+)}(\mathbf{p})$ は $u^{(1)}(\mathbf{p})$ に一致し，$u^{(-)}(\mathbf{p})$ は $u^{(2)}(\mathbf{p})$ に一致する．ここで z 軸以外の方向の $\mathbf{p}'$ を持つ状態についても，ヘリシティ固有スピノル $u^{(\pm)}(\mathbf{p}')$ を構築する必要がある．これは 3.4節で扱った回転演算子 (p.219の問題3-3(a)も参照) を利用すると，容易に実行できる．散乱面 (原点と $\mathbf{p}$ と $\mathbf{p}'$ によって規定される面) を xz 面に一致するように座標軸を導入するならば，為すべきことは z の正の方向に移動しているヘリシティ$+1$ (-1) の電子状態を，y 軸のまわりに散乱角 θ だけ回転させることである．つまり $u^{(+)}(\mathbf{p}')$ は次のように計算すればよい[7]．

[7] ここで S_{rot} ではなく S_{rot}^{-1} を用いるのは，“座標系”ではなく“物理状態”を回転させるからである．

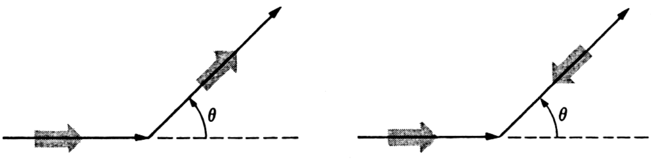


図4.3 (a) ヘリシティ非反転散乱. (b) ヘリシティ反転散乱. 灰色の矢はスピンの向きを示す.

$$
\begin{aligned}
u^{(+)}(\mathbf{p}') &= S_{\text{rot}}^{-1} u^{(1)}(\mathbf{p}) = \left(\cos\frac{\theta}{2} - i\Sigma_2 \sin\frac{\theta}{2}\right) u^{(1)}(\mathbf{p}) \\
&= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} - i\sigma_2 \sin\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\theta}{2} - i\sigma_2 \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{|\mathbf{p}|}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \\ \frac{|\mathbf{p}|}{E+m}\cos\frac{\theta}{2} \\ \frac{|\mathbf{p}|}{E+m}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.95}
$$

$u^{(-)}(\mathbf{p}')$ も同様に計算すると，次の結果を得る.

$$
u^{(-)}(\mathbf{p}') = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \\ \frac{|\mathbf{p}|}{E+m}\sin\frac{\theta}{2} \\ -\frac{|\mathbf{p}|}{E+m}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{4.96}
$$

これらのヘリシティ固有スピノルを用いることで，図4.3の (a) および (b) に示すような“ヘリシティ非反転(ノンフリップ)散乱”の振幅と“ヘリシティ反転(フリップ)散乱”の振幅を，直接的に評価できる．共通の比例因子を除いて $\bar{u}\gamma_4 u$ を比較すると，次のようになる.

$$\bar{u}^{(+)}(\mathbf{p}')\gamma_4 u^{(+)}(\mathbf{p}) = \frac{E+m}{2m}\left[\cos\frac{\theta}{2} + \left(\frac{|\mathbf{p}|}{E+m}\right)^2 \cos\frac{\theta}{2}\right]$$
$$= \frac{E}{m}\cos\frac{\theta}{2} \tag{4.97a}$$

$$\bar{u}^{(-)}(\mathbf{p}')\gamma_4 u^{(+)}(\mathbf{p}) = \frac{E+m}{2m}\left[-\sin\frac{\theta}{2} + \left(\frac{|\mathbf{p}|}{E+m}\right)^2 \sin\frac{\theta}{2}\right]$$
$$= -\sin\frac{\theta}{2} \tag{4.97b}$$

式(4.97) に示した２通りの極限の比較は興味深いものである．まず，もし電子が非相対論的であれば，ヘリシティ非反転とヘリシティ反転の確率の比は $\cot^2(\theta/2)$ となるが，これは $s_3 = \frac{1}{2}$ の電子のスピンを観測した場合にスピンが $\mathbf{p}'$ 方向を向いている確率と $-\mathbf{p}'$ 方向を向いている確率の比に一致している[8]．この結果は，低速で動く電子に対して原子核の静電場がスピン方向に影響を及ぼさないことから予想される通りである．他方，極端に相対論的な (光速に近い) 電子において，Coulomb 散乱によってスピン反転を起こす確率のスピン非反転確率に対する比は，決まった散乱角度 θ について見ると $(m/E)^2$ に従ってゼロに近づく．これも 3.11 節で論じた次のことを思い起こせば驚くべきことではない．すなわち (a) 相対論的極限においては，カイラリティとヘリシティは負号を除いて互いに一致する．(b) γ_4 相互作用は同じカイラリティの状態を結合させる．以上をまとめると，Coulomb 散乱によって低速電子は空間内でスピンの向きを変えないのに対し，相対論的極限における電子はヘリシティを (すなわち自身の運動方向に沿ったスピンを) 変えない．導出の方法から明らかであるが，この命題はスピン $\frac{1}{2}$ 粒子が，ベクトル場の第４成分のような変換性を持つ任意のポテンシャルによって散乱を受ける際の最低次の過程について，一般的に成立するものである．

ヘリシティ反転とヘリシティ非反転の確率を合わせると，Mott 散乱の最低次の断面積は，入射電子が“縦方向偏極 (longitudinally polarized) 電子”の場合と“非偏極電子”の場合とで等しいことが分かる．前者に関する和は，

$$\left|\bar{u}^{(+)}(\mathbf{p}')\gamma_4 u^{(+)}(\mathbf{p})\right|^2 + \left|\bar{u}^{(-)}(\mathbf{p}')\gamma_4 u^{(+)}(\mathbf{p})\right|^2 = \left(\frac{E}{m}\right)^2\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}$$
$$= \frac{E^2}{m^2}\left(1 - \frac{|\mathbf{p}|^2}{E^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{4.98}$$

となるが，これは非偏極電子の結果(4.84) と完全に一致している．しかし一般に Mott 散乱によって電子の偏極を検出できないわけではない．“横方向 (transversely) 偏極

[8] たとえば Merzbacher (1961), pp.276-277 を参照されたい．

電子”の散乱過程を“高次まで”調べると，微分断面積は $\sin\phi$ に依存することが分かる．ϕ は入射電子のスピンの向きを基準にした方位角である．

上の結果は具体的な自由粒子スピノルの式(式(4.95)-(4.96))から導いたが，対角和（トレース）の技法を用いて式(4.84)を得たときには自由粒子スピノルの具体的な形を用いる必要がなかった．特定のヘリシティ状態の間で遷移確率を求める場合にも，射影演算の技法を利用できれば，具体的なヘリシティ固有スピノルを用いることなく計算を行うことができる．このとき必要となるのは，電子スピノルへの射影演算子(4.72)を作用させて陽電子と区別する前に，特定のスピン状態のスピノルだけを抽出できるように，指定したスピン状態への射影演算子を構築することである[§]．

Pauli（パウリ）によるスピンの定式化において，

$$\frac{1+\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}}{2} \tag{4.99}$$

が2成分スピノルの任意方向 $\hat{\mathbf{n}}$ への射影演算子となることはよく知られている．これを参考にして，相対論的な理論における演算子として，まず，

$$\frac{1+\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}}{2} \tag{4.100}$$

という形を考えてみよう．しかしながら3.3節において強調したように，自由粒子スピノルは一般に $\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ の固有スピノルではない．その上，この形は明白な共変性を備えていない．そこで Σ_k と $\beta\Sigma_k = i\gamma_5\gamma_k$ が[†]非相対論的な極限において一致することを思い出して，代わりに次の形の演算子を考えてみる．

$$\frac{1+i\gamma_5\gamma\cdot w}{2} \qquad \text{[スピン-射影演算子]} \tag{4.101}$$

w は電子が静止している座標系に移行したときに，第4成分のない空間的な単位ベクトル $\hat{\mathbf{n}}$ に帰着するように設定する4元ベクトルである．

$$w\big|_{\text{rest frame}} = (\hat{\mathbf{n}}, 0) \tag{4.102}$$

一般には，電子が任意の4元運動量 p を持つ“任意の”座標系において w は，

$$w^2 = |\mathbf{w}|^2 - |w_0|^2 = 1, \qquad w\cdot p = 0 \tag{4.103}$$

[§](訳註) スピンの向きを運動量 $\mathbf{p}$ の方向に確定させたヘリシティ固有状態 (縦方向偏極状態) を特例として想定する場合もあり得るが，ここではスピン-射影演算子として一般的に，運動方向と独立に任意の“スピン方向”を考える．但し，次頁訳註も参照．

[†](訳註) $\Sigma_k = -i\gamma_i\gamma_j$ であり (式(3.99))，$\beta\Sigma_k = \gamma_4(-i\gamma_i\gamma_j) = i\gamma_4\gamma_i\gamma_j$ である ((ijk) cyclic)．各ガンマ行列は自身の逆行列なので，γ_5 の定義式 $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ (式(3.184)) から，たとえば $\gamma_1\gamma_5 = \gamma_2\gamma_3\gamma_4$ のようにして，γ_4 を含む3つのガンマ行列の積を，γ_5 ともうひとつのガンマ行列の積に置き換えることができる (p.133)．

を満たす．Lorentz変換によって電子が静止して見える座標系へ移ると，そのような静止座標系において w は $\hat{\mathbf{n}}$ に帰着し，式(4.101) が $\hat{\mathbf{n}}$ 方向の電子スピン状態への射影演算子になるように w を設定するのである．もし横方向偏極した電子への射影演算子を構築したいのであれば，その場合の w もやはり，

$$w^{(\mathrm{trans})} = (\hat{\mathbf{n}}, 0) \tag{4.104}$$

と置けばよい．一般に空間内の3元ベクトルは，それに直交する方向へ等速推進(ブースト)する座標系への Lorentz変換の下で大きさと向きを変えないからである．問題3-3(b) (p.219) を既に解いている読者は，横方向偏極した電子に関して $i\gamma_5\boldsymbol{\gamma}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ を用いることが理に適うことを理解できるであろう．一方，縦方向に偏極したヘリシティ+1 状態への射影演算子を望むのであれば，w として，

$$w^{(\mathrm{long})} = \left(\frac{E\hat{\mathbf{p}}}{m}, \frac{i|\mathbf{p}|}{m}\right) \tag{4.105}$$

を使わなければならない．これが式(4.103) を満たすことは明らかである．実際に $\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}$ と $i\gamma_5\gamma\cdot w^{(\mathrm{long})} = \left(i\gamma_5\boldsymbol{\gamma}\cdot\hat{\mathbf{p}}E - \gamma_5\gamma_4|\mathbf{p}|\right)/m$ がヘリシティ固有スピノルに対して“同じ効果”を及ぼすことの証明は難しくない．

$i\gamma\cdot p$ と $i\gamma_5\gamma\cdot w$ が互いに可換であることは重要である．

$$\begin{aligned}[\gamma\cdot p, \gamma_5\gamma\cdot w] &= -\gamma_5(\gamma\cdot p\,\gamma\cdot w + \gamma\cdot w\,\gamma\cdot p)\\ &= -2\gamma_5 p\cdot w = 0\end{aligned} \tag{4.106}$$

上式では式(4.81) と式(4.103) の関係を用いた．したがって $-i\gamma\cdot p$ と $i\gamma_5\gamma\cdot w$ の同時固有関数を，たとえば前者の固有値を $+m$ (電子状態 u を意味する)，後者の固有値を $+1$ と設定して構築することが可能である．そのような同時固有スピノルを $u^{(w)}(\mathbf{p})$ と表記する．本書において定義した自由粒子スピノルの記号の違いをまとめると，$u^{(1)}$ と $u^{(2)}$ を基調として記述した運動量固有状態は，Dirac-Pauli表示 (標準表示) の上側の2成分に対して 2×2 Pauli行列 σ_3 の固有値を利用していた．$u^{(+)}$ と $u^{(-)}$ (式(4.95)-(4.96)) を用いた記述は，ヘリシティ演算子 $\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}$ の固有値によって特徴づけられている．最後の $u^{(w)}(\mathbf{p})$ による記述は，$i\gamma_5\gamma\cdot w$ の固有値を利用したものである‡．

実際の計算では，$u^{(w)}_\alpha(\mathbf{p})\,\bar{u}^{(w)}_\beta(\mathbf{p})$ を“スピンの和をとらずに”評価する必要が生じる (式(4.71)参照)．式(4.72) からの類推で，これは電子-射影演算子 (陽電子-射

‡(訳註) つまり $u^{(1,2)}$ と $u^{(\pm)}$ はスピンの方向に制約を課してあるが (前者は z 軸方向，後者は粒子自身の運動方向)，$u^{(w)}$ は“スピン方向”の任意性を持つ．しかし速度を持った粒子において，任意方向のスピン成分値はよい量子数にはならないので (p.115参照)，定常状態を扱うためには単純に“スピン方向を選ぶ”とは言えず，電子が静止して見える座標系において確定させたスピン方向 $\hat{\mathbf{n}}$ と関係づけて定義される4元ベクトル w が必要となっている．

影演算子と区別される）に，共変なスピン-射影演算子(4.101)を掛けた演算子によって与えられるものと予想される．

$$u_\alpha^{(w)}(\mathbf{p})\,\bar{u}_\beta^{(w)}(\mathbf{p}) = \left(\frac{-i\gamma\cdot p + m}{2m}\right)_{\alpha\gamma}\left(\frac{1 + i\gamma_5\gamma\cdot w}{2}\right)_{\gamma\beta} \tag{4.107}$$

この予想は次のように容易に証明される．まず式(4.107)を，静止したスピンが上向きの電子に適用できることは明らかである．

$$\left(\frac{\gamma_4 m + m}{2m}\right)\left(\frac{1 + i\gamma_5\gamma_3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.108}$$

z方向の単位ベクトルを任意方向の単位ベクトル $\hat{\mathbf{n}}$ へ変換する回転を考えると，スピンの向きが $\hat{\mathbf{n}}$ の静止したスピノルについて，

$$u^{(w)}(\mathbf{0})\,\bar{u}^{(w)}(\mathbf{0}) = \left(\frac{\gamma_4 m + m}{2m}\right)\left(\frac{1 + i\gamma_5\gamma\cdot(\hat{\mathbf{n}}, 0)}{2}\right) \tag{4.109}$$

を得る．それから式(4.73)から式(4.72)を導いたように，式(4.109)にも“Lorentz 等速推進（ブースト）”を施せば，一般的な式(4.107)が得られる．一例として，具体的なヘリシティ固有スピノルを用いることなく $\left|\bar{u}^{(+)}(\mathbf{p}')\gamma_4 u^{(+)}(\mathbf{p})\right|^2$ を次のように評価できる．

$$\begin{aligned} \left|\bar{u}^{(+)}(\mathbf{p}')\gamma_4 u^{(+)}(\mathbf{p})\right|^2 &= \bar{u}_\delta^{(w)}(\mathbf{p})(\gamma_4)_{\delta\gamma} u_\gamma^{(w')}(\mathbf{p}')\,\bar{u}_\beta^{(w')}(\mathbf{p}')(\gamma_4)_{\beta\alpha} u_\alpha^{(w)}(\mathbf{p}) \\ &= \mathrm{Tr}\left[\gamma_4 \frac{(-i\gamma\cdot p' + m)}{2m}\frac{(1 + i\gamma_5\gamma\cdot w')}{2}\gamma_4 \frac{(-i\gamma\cdot p + m)}{2m}\frac{(1 + i\gamma_5\gamma\cdot w)}{2}\right] \end{aligned} \tag{4.110}$$

ここではヘリシティが +1 の縦方向偏極状態を考えるので，w と w' を式(4.105)によって与えればよい．これを直接的に計算してみれば（退屈な作業になるが），その結果が式(4.97a)の絶対値の自乗と等しいことを確認できる[9]．

対消滅と対生成　ここまでは静的な外部ポテンシャルによる電子の散乱について論じてきた．しかし動的な外部ポテンシャルが，電子（または陽電子）を散乱するだけではなく，電子-陽電子対（つい）を消滅させたり生成したりする性質も重要である．たとえば，

[9] この特別に単純な例では，共変なスピン-射影演算子を用いることの利点はほとんどない．式(4.95)を用いた計算を容易に実行できることは既に見た通りである．

$$\mathrm{e}^- + \mathrm{e}^+ \;\rightarrow\; \mathrm{vacuum} \tag{4.111}$$

のような反応は，外部ポテンシャルがない場合にはエネルギー-運動量保存の制約のために起こりえない．しかしながら，ちょうど電子と陽電子のエネルギーの和に相当する角振動数の時間依存性を持つ動的なポテンシャルが存在すれば，一般に式(4.111)の反応が起こる確率が生じることをこれから見てみる．電子-陽電子系の始状態 Φ_i を次のように表す．

$$\Phi_i = |\mathrm{e}^-\mathrm{e}^+\rangle = b^{(s_-)\dagger}(\mathbf{p}_-)\,d^{(s_+)\dagger}(\mathbf{p}_+)|0\rangle \tag{4.112}$$

すなわち始状態における電子の状態を $(\mathbf{p}_-, s_-)$，陽電子の状態を $(\mathbf{p}_+, s_+)$ と置く．最低次の過程として，

$$S_{fi}^{(1)} = -i\left\langle 0\left| -ie\int d^4x\,\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu\right|\mathrm{e}^-\mathrm{e}^+\right\rangle \tag{4.113}$$

を考える．この問題で式(4.58)において寄与を生じる項は，電子-陽電子対(つい)を消滅させる $\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\psi_\beta^{(+)}$ だけである．すでに慣れ親しんだ手続きに従って，次式を得る．

$$S_{fi}^{(1)} = -e\int d^4x\left[\sqrt{\frac{m}{E_+V}}\,\bar{v}^{(s_+)}(\mathbf{p}_+)\,e^{ip_+\cdot x}\right]\gamma_\mu\left[\sqrt{\frac{m}{E_-V}}\,u^{(s_-)}(\mathbf{p}_-)\,e^{ip_-\cdot x}\right]A_\mu^{(e)}(x) \tag{4.114}$$

ここで $p_\pm = (\mathbf{p}_\pm, iE_\pm) = \left(\mathbf{p}_\pm, i\sqrt{|\mathbf{p}_\pm|^2 + m^2}\right)$ である．上式は電子散乱に関する1次のS行列(4.64) とよく似ている．唯一の違いは放出電子を表す随伴スピノルが，陽電子の消滅を表す随伴スピノルに置き換わったところにある．この類似性は偶然のものでは“ない”．空孔理論の記述によれば，対(つい)消滅は正エネルギー電子が空いた負エネルギー状態へ“散乱”される過程にほかならない．式(4.64) と式(4.114) の類似性については，4.5節でFeynman(ファインマン)の時空的な描像によるアプローチを論じる際に再び考察する予定である．

対(つい)消滅を表す $S_{fi}^{(1)}$ が時間に依存しないポテンシャル (たとえば静的なCoulombポテンシャル) の下で寄与を持たないことは，時間積分によって $\delta(E_+ + E_-)$ が現れることを考えれば明白である．しかし角振動数 $\omega = E_+ + E_-$ で時間に依存する式(4.57) のようなポテンシャルがあれば，因子 $\exp\left[-i(E_+ + E_- - \omega)t\right]$ の積分から $\delta(E_+ + E_- - \omega)$ が現れて $S_{fi}^{(1)}$ が寄与を持つようになる．この違いを物理的に捉えると，時間に依存するポテンシャルは荷電粒子に対してエネルギーを供給したり，荷電粒子からエネルギーを吸収したりすることができるが，時間に依存しないポテンシャ

ル (静的 Coulombポテンシャルなど) は荷電粒子と運動量をやり取りすることだけが可能で，エネルギーの授受はできないという違いとして理解される．

式(4.111) の逆の過程，

$$\text{vacuum} \;\rightarrow\; e^{+} + e^{-} \tag{4.115}$$

も全く同じ方法で扱うことができる．問題4-5 (p.378) において読者は式(4.57) の振動ポテンシャルが単位時間，単位体積あたりに電子-陽電子対(つい)を生成する確率を計算することになる．しかしポテンシャル(4.57) は必ずしも現実的なものではない．この問題との関連で，スピンがゼロの原子核が同じ Z の値を保って励起-緩和を反復する過程に言及しよう (たとえば $O^{16} \rightleftharpoons O^{16*}$ がある．O^{16*} は O^{16} が励起した $J=0$ 状態で，励起エネルギーは $\Delta E = 6.05\,\text{MeV}$ である)．これが電子-陽電子系と関わる効果を扱う際には，次のような現象論的ポテンシャルを採用することができる．

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad A_0 &= f(r)\cos(\Delta E\, t) \\ f(r) &= 0 \quad \text{for} \;\; r > \text{原子核半径} \end{aligned} \tag{4.116}$$

この時間に依存する実効的ポテンシャルによって，

$$O^{16*} \;\rightarrow\; O^{16} + e^{+} + e^{-} \tag{4.117}$$

のような過程を論じるための簡便な枠組みが与えられる．見方を変えればこの現象は，振動ポテンシャルによる電子-陽電子対(つい)の生成過程(4.115) にほかならない．式(4.117) のような過程は原子核物理において，対生成を伴う“内部転換”(internal conversion) として知られる．この理論は H. Yukawa (湯川秀樹) と S. Sakata (坂田昌一) によって 1935年に定式化された[10)]．

Λハイペロンの崩壊　Mott散乱 (一般的には外部ポテンシャルを含む任意の問題) について詳しく見てきたが，これは本当は共変な摂動論を紹介するために相応しい実例とは言えない．系において無限に重い原子核が存在していると，その原子核が原点で静止しているような座標系が，他の任意の Lorentz座標系と比べて特別な意味を持ってしまう．共変性の欠如はエネルギー保存を表すデルタ関数に運動量保存を表すデルタ関数が伴わないという点に反映している．これは物理的には，外部ポテンシャルとして導入される無限に重い原子核が，任意の大きさの運動量を収容してしまえることに起因する．しかし原子核を物理系の“外部”と見なす代わりに，電子と原子核を合

10) 本書ではこの興味深い現象に立ち入らないが，関心のある読者は Akhiezer and Berestetskii (1965), pp.567-569 を参照されたい．

わせた“全体”を量子力学系と見なすことにすれば，全エネルギーの保存と全運動量の保存が両方とも要請される (p.381 の問題4-13 では陽子が無限に重いという仮定を導入せずに陽子による電子散乱を扱う).

共変な摂動論において扱われる技法を見るために，再び Λハイペロンの崩壊を考察しよう (これは 3.11節で既に扱っている). 相互作用密度(3.432) を用いて，この過程に対応する1次のS行列の要素を書く.

$$
\begin{aligned}
S_{fi}^{(1)} &= -i\left\langle \pi^- \mathrm{p}\left|\int d^4x\,\phi_{\mathrm{ch}}^{\dagger}\bar{\psi}_{\mathrm{p}}(g+g'\gamma_5)\psi_{\Lambda}\right|\Lambda\right\rangle \\
&= -i\int d^4x\,\frac{e^{-ip_\pi\cdot x}}{\sqrt{2E_\pi V}}\left[\sqrt{\frac{m_{\mathrm{p}}}{E_{\mathrm{p}}V}}\bar{u}_{\mathrm{p}}e^{-ip_{\mathrm{p}}\cdot x}\right](g+g'\gamma_5)\left[\sqrt{\frac{m_\Lambda}{E_\Lambda V}}u_\Lambda e^{ip_\Lambda\cdot x}\right] \\
&= -i(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_\Lambda-p_\pi-p_{\mathrm{p}})\sqrt{\frac{1}{2E_\pi V}}\sqrt{\frac{m_{\mathrm{p}}}{E_{\mathrm{p}}V}}\sqrt{\frac{m_\Lambda}{E_\Lambda V}}\,\bar{u}_{\mathrm{p}}(g+g'\gamma_5)u_\Lambda
\end{aligned}
\tag{4.118}
$$

エネルギー保存と運動量保存を表す4次元デルタ関数が現れていることに注目してもらいたい. ここで上のような行列要素から運動学的な因子である $\delta^{(4)}(p_\Lambda-p_\pi-p_{\mathrm{p}})$ や場の展開係数 $\sqrt{m_{\mathrm{p}}/E_{\mathrm{p}}V}$ などを除いた要素によって構成される共変な$\mathcal{M}$行列を定義しておくと便利である.

$$
S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_\Lambda-p_\pi-p_{\mathrm{p}})\sqrt{\left(\frac{1}{2E_\pi V}\right)\left(\frac{m_{\mathrm{p}}}{E_{\mathrm{p}}V}\right)\left(\frac{m_\Lambda}{E_\Lambda V}\right)}\,\mathcal{M}_{fi}
\tag{4.119}
$$

ここで扱うハイペロンの崩壊については δ_{fi} ($S^{(0)}$ に起因する) はゼロである. $\mathcal{M}_{fi}$ を g と g' の1次まで考えることにすると，上述の定義により，

$$
\mathcal{M}_{fi} = \bar{u}_{\mathrm{p}}(g+g'\gamma_5)u_\Lambda
\tag{4.120}
$$

と与えられる. これは固有順時Lorentz変換の下で共変である (p.132, 表3.1参照).

Λハイペロンの崩壊によって生じる $\pi^-\mathrm{p}$ 系の角度分布 (p空間内分布) を計算することに関心が持たれる. 始状態におけるハイペロンのスピン状態は w によって指定する. もし生成した陽子の偏極を観測することに関心がなければ，陽子のスピン状態について和を取らなければならない. そこで次の計算を考える.

$$
\begin{aligned}
\sum_{\text{proton spin}}|\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \sum_{\text{proton spin}}\left[u_\Lambda^{(w)\dagger}(g^*+g'^*\gamma_5)\gamma_4 u_{\mathrm{p}}\right]\left[\bar{u}_{\mathrm{p}}(g+g'\gamma_5)u_\Lambda^{(w)}\right] \\
&= \mathrm{Tr}\left[(g^*-g'^*\gamma_5)\left(\frac{-i\gamma\cdot p_{\mathrm{p}}+m_{\mathrm{p}}}{2m_{\mathrm{p}}}\right)(g+g'\gamma_5)\left(\frac{-i\gamma\cdot p_\Lambda+m_\Lambda}{2m_\Lambda}\right)\left(\frac{1+i\gamma_5\gamma\cdot w}{2}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{4.121}
$$

この対角和(トレース)の評価は，次の関係に注意すると容易になる．

$$\mathrm{Tr}(\gamma_5 \underbrace{\gamma_\mu\gamma_\nu\cdots}_{\text{less than four }\gamma\text{ matrices }(\mu,\nu,\ldots\neq 5)}) = 0 \tag{4.122}$$

式(4.121) の $4m_{\rm p}m_\Lambda$ 倍を考えると，ここで残る項は以下のものだけである§.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}|g|^2\,\mathrm{Tr}\left[(-i\gamma\cdot p_{\rm p})(-i\gamma\cdot p_\Lambda)\right] + \frac{1}{2}|g|^2\,\mathrm{Tr}(m_{\rm p}m_\Lambda),\\
&+\frac{1}{2}|g'|^2\,\mathrm{Tr}\left[(-\gamma_5)(-i\gamma\cdot p_{\rm p})\gamma_5(-i\gamma\cdot p_\Lambda)\right],\\
&+\frac{1}{2}|g'|^2\,\mathrm{Tr}\left[(-\gamma_5)m_{\rm p}\gamma_5 m_\Lambda\right] + \frac{1}{2}g^*g'\,\mathrm{Tr}\left[(-i\gamma\cdot p_{\rm p})\gamma_5 i\gamma_5\gamma\cdot w m_\Lambda\right],\\
&+\frac{1}{2}g'^*g\,\mathrm{Tr}\left[(-\gamma_5)(-i\gamma\cdot p_{\rm p})i\gamma_5\gamma\cdot w m_\Lambda\right],
\end{aligned} \tag{4.123}$$

$\mathrm{Tr}\left[(-\gamma_5)m_{\rm p}(i\gamma_5\gamma\cdot w)(-i\gamma\cdot p_\Lambda)\right]$ のような項は，公式(4.80) を適用すると $w\cdot p_\Lambda = 0$ なので消える．式(4.123) の中の γ_5 は $\gamma_5\gamma_\mu\gamma_5 = -\gamma_\mu$ や $\gamma_5^2 = 1$ を利用して“消す”．式(4.80) と式(4.82) を用いると，次の結果が得られる．

$$\begin{aligned}
4m_{\rm p}m_\Lambda \sum_{\text{proton spin}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 &= |g|^2(-2p_{\rm p}\cdot p_\Lambda + 2m_{\rm p}m_\Lambda) + |g'|^2(-2p_{\rm p}\cdot p_\Lambda - 2m_{\rm p}m_\Lambda)\\
&\quad +2\mathrm{Re}(gg'^*)(2p_{\rm p}\cdot w m_\Lambda)
\end{aligned} \tag{4.124}$$

特定の Lorentz座標系を選ばずに†，終状態における陽子の運動量と π 中間子の運動量を微小範囲に限定した微分崩壊頻度を，次のように表すことができる．

$$\begin{aligned}
dw &= \frac{Vd^3p_{\rm p}}{(2\pi)^3}\frac{Vd^3p_\pi}{(2\pi)^3}\sum_{\text{proton spin}}\frac{|S_{fi}|^2}{T}\\
&= \frac{1}{T}\left|(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_\Lambda - p_\pi - p_{\rm p})\right|^2\\
&\quad\times\left(\frac{1}{2E_\pi V}\right)\left(\frac{m_{\rm p}}{E_{\rm p}V}\right)\left(\frac{m_\Lambda}{E_\Lambda V}\right)\frac{Vd^3p_{\rm p}}{(2\pi)^3}\frac{Vd^3p_\pi}{(2\pi)^3}\sum_{\text{proton spin}}|\mathcal{M}_{fi}|^2
\end{aligned} \tag{4.125}$$

$Vd^3p_{\rm p}/(2\pi)^3$ と $Vd^3p_\pi/(2\pi)^3$ が両方ともあるが，一方の積分を実行すると，デルタ関数の積分の結果として，それ以降の式で運動量保存の制約が課されることになる．

§(訳註) 奇数個のガンマ行列積の対角和がゼロという規則も用いる (式(4.83)参照)．式(4.123) で残されている各対角和項は何れも偶数個のガンマ行列を含み，かつ式(4.122) にも該当しない項である．

†(訳註) 3.11節と違って座標系を Λハイペロンの静止系に選んでいないので，式(4.125) の E_Λ は一般に $E_\Lambda = \sqrt{|\mathbf{p}_\Lambda|^2 + m_\Lambda^2} \neq m_\Lambda$ であり，因子 m_Λ/E_Λ が残る．

4次元デルタ関数の絶対値の自乗は式(4.67)-(4.68)と同様に扱えばよい．すなわち，

$$\delta^{(3)}(\mathbf{p}_\Lambda-\mathbf{p}_\pi-\mathbf{p}_\mathrm{P})=\lim_{V\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^3}\int_V d^3x\exp\left[i(\mathbf{p}_\Lambda-\mathbf{p}_\pi-\mathbf{p}_\mathrm{P})\cdot\mathbf{x}\right] \tag{4.126}$$

は $\mathbf{p}_\Lambda-\mathbf{p}_\pi-\mathbf{p}_\mathrm{P}=\mathbf{0}$ のときに $V/(2\pi)^3$ になるので，

$$\left|\delta^{(4)}(p_\Lambda-p_\pi-p_\mathrm{P})\right|^2=\frac{VT}{(2\pi)^4}\delta^{(4)}(p_\Lambda-p_\pi-p_\mathrm{P}) \tag{4.127}$$

と見なせばよい．式(4.125)を書き直すと次のようになる[11]．

$$dw=(2\pi)^4\left(\frac{1}{2E_\Lambda}\right)\left[\frac{d^3p_\mathrm{P}}{(2\pi)^3 2E_\mathrm{P}}\right]\left[\frac{d^3p_\pi}{(2\pi)^3 2E_\pi}\right] \times(4m_\mathrm{P}m_\Lambda)\sum_{\text{proton spin}}|\mathcal{M}_{fi}|^2\delta^{(4)}(p_\Lambda-p_\pi-p_\mathrm{P}) \tag{4.128}$$

もはやここに規格化体積 V は現れない．上式(4.128)は $1/E_\Lambda$ を除いて，相対論的に完全に不変であることを指摘しておく．このことの証明は，次の関係に注意すれば充分である．

$$\begin{aligned}\frac{d^3p}{2E}&=\int d^4p\,\frac{\delta\left(p_0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}\\&=\int_{p_0>0}d^4p\,\frac{\delta\left(p_0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)+\delta\left(p_0+\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)}{2\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}\\&=\int_{p_0>0}\delta\left(p^2+m^2\right)d^4p\end{aligned} \tag{4.129}$$

p_0 は積分変数であり，$\mathbf{p}$ を指定すると値が決まってしまう $E=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$ とは意味が異なる[12]．また dw が $1/E_\Lambda$ に依存することは，特殊相対論の観点から容易に理解できる．始状態の Λハイペロンが速く動いているほど，相対論的な時間遅延の効果によって崩壊を起こすまでの時間が長くなり，崩壊頻度は低下する．

式(4.128)において $\sum|\mathcal{M}_{fi}|^2$ に式(4.124)を代入した式は，任意のLorentz座標系における偏極した Λハイペロンの微分崩壊頻度を与える．ここで改めて始状態の

11) この式を任意の崩壊過程へ一般化した公式を，付録Dにおいて示しておく．

12) 時間的(タイムライク)な任意の4元ベクトル(たとえば自由粒子の4元運動量など)において第ゼロ成分の符号はLorentz不変な意味を持つので，式(4.129)の積分範囲が $p_0>0$ に制約されていても相対論的不変性には抵触しない．(以下訳註)式(4.129)の2行目から3行目への変形には，量子力学の教科書に載っているデルタ関数の次の性質をそのまま利用すればよい．

$$\delta(x^2-a^2)=\frac{\delta(x-a)+\delta(x+a)}{2a},\quad a>0$$

Λハイペロンが静止している座標系を選ぶことにして $\mathbf{p}_\Lambda = \mathbf{0}$ とする．π中間子の運動量に関する積分を施すと，運動量保存を表すデルタ関数によって $\mathbf{p}_\mathrm{p} = -\mathbf{p}_\pi$ (= $\mathbf{p}$ と置く) の制約が課され，微分崩壊頻度は次のようになる．

$$dw = 2\pi \frac{|\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}| d\Omega}{(2\pi)^3}\left(\frac{m_\mathrm{p}}{E_\mathrm{p}}\right)\left(\frac{1}{2E_\pi}\right)\sum |\mathcal{M}_{fi}|^2 \delta(m_\Lambda - E_\pi - E_\mathrm{p}) \tag{4.130}$$

上式は，$(m_\mathrm{p}/E_\mathrm{p})$ と $(1/2E_\pi)$ と $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ を合わせたものが $V|(H'_\mathrm{I})_{fi}|^2$ となることを理解すれば，黄金律と完全に一致していることが分かる．一方で w は今，Λハイペロンが静止している座標系において3次元空間内の特定方向を向いた単位ベクトル $(\hat{\mathbf{n}}, 0)$ なので，式(4.124) は次のようになる．

$$4m_\mathrm{p}m_\Lambda \sum |\mathcal{M}_{fi}|^2 = 2\Big[|g|^2(E_\mathrm{p}m_\Lambda + m_\mathrm{p}m_\Lambda) + |g'|^2(E_\mathrm{p}m_\Lambda - m_\mathrm{p}m_\Lambda) + 2\mathrm{Re}(gg'^*)(\mathbf{p}_\mathrm{p}\cdot\hat{\mathbf{n}} m_\Lambda)\Big] \tag{4.131}$$

上式から，前章で得た崩壊の角度分布(3.447) が再び導かれる．もし崩壊頻度 (崩壊幅) を求めたいのであれば，式(4.130) を $\mathbf{p}$ 空間全域にわたって積分すればよい．

$$\Gamma(\Lambda \to \pi^- + \mathrm{p}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \frac{|\mathbf{p}|}{m_\Lambda^2}\int d\Omega \sum_{\text{proton spin}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 4m_\mathrm{p}m_\Lambda \tag{4.132}$$

上式の導出には，次の関係を用いた‡．

$$d|\mathbf{p}|\delta(m_\Lambda - E_\pi - E_\mathrm{p}) = \frac{1}{\partial(E_\pi + E_\mathrm{p})/\partial|\mathbf{p}|} = \frac{1}{\big(|\mathbf{p}|/E_\pi\big) + \big(|\mathbf{p}|/E_\mathrm{p}\big)} = \frac{E_\pi E_\mathrm{p}}{|\mathbf{p}| m_\Lambda} \tag{4.133}$$

ここで付言しておくと，式(4.132) は，任意の2粒子生成型崩壊に適用できる次の有用な公式の特例にあたる[13]．

---

‡(訳註) p.247 訳註および p.206-207 訳註参照．

13) ここに現れる質量の積，

$$\prod_{\substack{\text{external}\\ \text{fermion}}} (2m_\text{fermi})$$

は，ボゾンとフェルミオンの規格化のための係数が異なること (それぞれ $\sqrt{1/2EV}$ および $\sqrt{m/EV}$．式(4.119) 参照) によって生じる因子である．もし自由粒子スピノルの規格化条件として $u^{(s)\dagger}(\mathbf{p})u^{(s')}(\mathbf{p}) = (E/m)\delta_{ss'}$ の代わりに $\bar{u}^{(s)}(\mathbf{p})u^{(s')}(\mathbf{p}) = 2m\delta_{ss'}$ を採用すれば，両者の違いは無くなる．(以下訳註) 規格化条件 $\bar{u}u = 2m$ は，$u^\dagger u = 2E$ と等価である．自由粒子スピノルの規格化因子を $u^\dagger u = (E/m) \to 2E$ と変更すれば，フェルミオン場の展開係数因子がボゾン場のそれと同じ形になるということである．

$$\Gamma(1 \to 2+3) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \frac{|\mathbf{p}|}{m_1^2}\int d\Omega \sum_{\text{final spin}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \prod_{\substack{\text{external}\\ \text{fermion}}} (2m_{\text{fermi}}) \tag{4.134}$$

式(4.131) と式(4.132) から，最終的に次式を得る．

$$\Gamma(\Lambda \to \pi^- + \mathrm{p}) = \left[\frac{|g|^2}{4\pi} + \frac{|g'|^2}{4\pi}\left(\frac{E_\mathrm{p} - m_\mathrm{p}}{E_\mathrm{p} + m_\mathrm{p}}\right)\right] \frac{|\mathbf{p}|(E_\mathrm{p} + m_\mathrm{p})}{m_\Lambda} \tag{4.135}$$

これは，式(3.451) と完全に一致している．

読者はこれで，１次のＳ行列によって適正に記述される如何なる崩壊過程についても，崩壊頻度と生成粒子の角度分布を求めることができるはずである．練習問題として $\omega \to e^+ + e^-$ や $\Sigma^0 \to \Lambda + \gamma$ を調べてみるとよい (p.379, 問題4-6, 問題4-7).

4.4 ２光子放射型 e^-e^+ 対消滅と Compton 散乱；電子の伝播関数

２光子放射型 e^-e^+ 対消滅のＳ行列 本節では２次の行列要素を含むような過程へと議論を進めてみる．すべての議論の基礎となる基本的な関係は，4.2節で導いた $S^{(2)}$ 行列の２つの形式である (式(4.48))．第１形式では，

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_\mathrm{I}(t_1) H_\mathrm{I}(t_2) \\ &= (-i)^2 \int d^4x_1 \int_{t_2<t_1} d^4x_2\, \mathcal{H}_{\text{int}}(x_1)\mathcal{H}_{\text{int}}(x_2) \end{aligned} \tag{4.136}$$

のように x_2 に関する４次元積分が $t_2 < t_1$ の領域に限定されるのに対し，第２形式では，

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 H_\mathrm{I}(t_2) H_\mathrm{I}(t_1) \\ &= (-i)^2 \int d^4x_1 \int_{t_2>t_1} d^4x_2\, \mathcal{H}_{\text{int}}(x_2)\mathcal{H}_{\text{int}}(x_1) \end{aligned} \tag{4.137}$$

のように t_2 が t_1 よりも“後”になる[14)]．

14) “第１形式”と“第２形式”をまとめて，次のように書く文献が多い．

$$S^{(2)} = \frac{(-i)^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 P[H_\mathrm{I}(t_1) H_\mathrm{I}(t_2)]$$

P は演算子積に作用する演算子であり，演算子積の順序を次のように再配列する．

$$P[A(t_1)B(t_2)] = \begin{cases} A(t_1)B(t_2) & \text{if } t_1 > t_2 \\ B(t_2)A(t_1) & \text{if } t_2 > t_1 \end{cases}$$

前置きはこれだけにして，早速 $S^{(2)}$ によって記述される特定の物理過程を考察してみよう．最初に2光子放射型の電子-陽電子消滅 (e$^-$e$^+$対消滅) を詳しく扱い§，具体的な物理状況において，電子の伝播関数の概念がどのように現れるかを示す．仮想光子や仮想中間子の伝播を含むような2次の過程に関する議論は4.6節まで措いておく．

2光子放射型e$^-$e$^+$対消滅は，次のような過程である．

$$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma \tag{4.138}$$

始状態と終状態は，次のように書かれる．

$$\begin{aligned}
\Phi_i &= |e^-e^+\rangle = b^{(s-)\dagger}(\mathbf{p}_-)b^{(s+)\dagger}(\mathbf{p}_+)|0\rangle \\
\Phi_f &= |2\gamma\rangle = a^\dagger_{\mathbf{k}_1\alpha_1}a^\dagger_{\mathbf{k}_2\alpha_2}|0\rangle
\end{aligned} \tag{4.139}$$

言うまでもなく $S^{(0)}$ と $S^{(1)}$ は寄与を持たない．したがって S が $S^{(2)}$ によって近似できるものと仮定して，S_{fi} を“第1形式”で次のように書く．

$$S_{fi} = (-e)^2\int d^4x_1\int_{t_2<t_1} d^4x_2\,\langle 2\gamma|\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)A_\mu(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)A_\nu(x_2)|e^-e^+\rangle \tag{4.140}$$

この問題においては，この次数までであれば仮想光子を考える必要はなく，実光子 (real photon) だけが含まれるので，A_μ を第2章で論じたような (量子化された) 横波の電磁場と見なすことが許される[15)]．電子場の演算子に関して言えば，終状態は真空状態である．また同様に，光子場に関して始状態は真空状態にあたる．自由電子場と自由光子場は異なる部分空間に対して作用を及ぼすので，式(4.140) を次のように書き直すことができる．

$$\begin{aligned}
S_{fi} = (-e)^2\int d^4x_1\int_{t_2<t_1} d^4x_2\,&\langle 0|\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)|e^-e^+\rangle \\
&\times\langle 2\gamma|A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)|0\rangle
\end{aligned} \tag{4.141}$$

この“P積”(Dyson chronological product : Dyson の時系列積) を，後から導入する“T積”(Wick time-ordered product : Wick の時間順序化積) と混同してはならない．

§(訳註)“2光子放射型”を第一義的に重視する理由は，終状態として1光子状態を想定すると，運動量とエネルギーを独立に設定することができず，一般の e$^-$e$^+$始状態の下で運動量保存とエネルギー保存を両立できないからである．

15)付録A の内容に基づいて，完全な相互作用ハミルトニアンは瞬時のCoulomb相互作用 (instantaneous Coulomb interaction) も含まなければならないと考える読者もあるだろう．しかしこの2光子放射型e$^-$e$^+$対消滅の振幅を e^2 の次数まで計算するだけならば，Coulomb相互作用は無関係である．

第２章の議論から，我々は $\langle 2\gamma|A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)|0\rangle$ を扱う方法を既に知っている．演算子 $A_\mu(x_1)$ は時空点 x_1 において光子１もしくは光子２ (光子の番号は式(4.139)第２式の添字に対応する) を生成できるということであり，次式が得られる．

$$\langle 2\gamma|A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)|0\rangle = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_1 V}}\epsilon_\mu^{(\alpha_1)}e^{-ik_1\cdot x_1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_2 V}}\epsilon_\nu^{(\alpha_2)}e^{-ik_2\cdot x_2}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_2 V}}\epsilon_\mu^{(\alpha_2)}e^{-ik_2\cdot x_1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_1 V}}\epsilon_\nu^{(\alpha_1)}e^{-ik_1\cdot x_2}\right)\right] \tag{4.142}$$

ここで $\epsilon_\mu^{(\alpha_1)}$ は,

$$\epsilon_\mu^{(\alpha_1)} = (\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)}, 0) \tag{4.143}$$

を表す．$\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)}$ は $\mathbf{k}_1$ に対して垂直な単位ベクトルである．ここでは実光子を扱うので，もちろん $|\mathbf{k}_1| = \omega_1$ である．

次に電子場の演算子に関する行列要素を考察しよう．式(4.141) において $\bar\psi\gamma_\mu\psi$ を式(4.59) に置き換えると，そのままでは項が 16個も現れるように見える．しかし e^-e^+ 状態と真空状態の間の行列要素を考えるならば，多くの項は寄与を持たない．たとえば $\bar\psi_\alpha^{(+)}(x_1)\psi_\beta^{(+)}(x_1)\bar\psi_\gamma^{(+)}(x_2)\psi_\delta^{(+)}(x_2)$ は２つの電子と２つの陽電子を消す．電子-陽電子対の消滅過程を対象とするならば，始状態は２つだけ粒子を含み，終状態は粒子を含まないので，上のように合計４つの粒子を消滅させる演算子積は，この過程に対して寄与を持たない．一般に２粒子状態に４つの演算子を作用させて粒子のない状態へ移行するには，３つの(+)演算子 (消滅演算子) と１つの(−)演算子 (生成演算子) の組合せを選ばなければならない．さらに，後の時刻 t_1 における演算子の組 $\bar\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_1)$ を(−)成分を省いて $\bar\psi_\alpha^{(+)}(x_1)\psi_\beta^{(+)}(x_1)$ に置き換えることが許される．これは $\bar\psi_\alpha^{(-)}(x_1)$ や $\psi_\beta^{(-)}(x_1)$ を $\langle 0|$ に対して“右から”作用させるとゼロになるからである．(物理的には $\bar\psi_\alpha^{(-)}(x_1)$ や $\psi_\beta^{(-)}(x_1)$ が後の時刻 t_1 において電子や陽電子を生成し，それは $t = +\infty$ まで残って系は真空状態にならないということに対応しており，理に適っている．) したがって 16個の項の中で考慮する必要があるのは，前の時刻 t_2 の演算子の組の添字を違えた次の２つだけになる．

$$(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}\bar\psi_\alpha^{(+)}(x_1)\psi_\beta^{(+)}(x_1)\bar\psi_\gamma^{(-)}(x_2)\psi_\delta^{(+)}(x_2) \tag{4.144}$$

$$-(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}\bar\psi_\alpha^{(+)}(x_1)\psi_\beta^{(+)}(x_1)\psi_\delta^{(-)}(x_2)\bar\psi_\gamma^{(+)}(x_2) \tag{4.145}$$

式(4.145) の $\bar\psi_\gamma^{(+)}(x_2)$ と $\psi_\delta^{(-)}(x_2)$ の順序と負号は，式(4.59) の第３項に合わせてある．ここで式(4.144) の先頭の陽電子消滅演算子 $\bar\psi_\alpha^{(+)}$ を後ろに移して，消滅演算

子の組 $\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1)\psi_\delta^{(+)}(x_2)$ が始状態の電子-陽電子対を直接消滅させるようにする．

$$\begin{aligned}&(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}\,\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1)\,\psi_\beta^{(+)}(x_1)\,\bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2)\,\psi_\delta^{(+)}(x_2)\\ =\;&(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}\,\psi_\beta^{(+)}(x_1)\,\bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2)\,\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1)\,\psi_\delta^{(+)}(x_2)\end{aligned} \tag{4.146}$$

式(4.145) に関しては x_1 と x_2 を交換して x_2 における電子消滅演算子 $\psi^{(+)}(x_2)$ をつくり，和をとる添字に関しても $\mu\leftrightarrow\nu$，$\alpha\beta\leftrightarrow\gamma\delta$ という入れ換えを行って，後ろ側の２つの消滅演算子を式(4.146) と同じ体裁にする．

$$\begin{aligned}&-(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\,\bar{\psi}_\gamma^{(+)}(x_2)\,\psi_\delta^{(+)}(x_2)\,\psi_\beta^{(-)}(x_1)\,\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1)\\ =\;&-(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}\,\bar{\psi}_\gamma^{(+)}(x_2)\,\psi_\beta^{(-)}(x_1)\,\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1)\,\psi_\delta^{(+)}(x_2)\end{aligned} \tag{4.147}$$

このように x_1 と x_2 を入れ換えることは可能であるが，今度は t_2 の方が t_1 の“後”になることを考慮しなければならない．したがって，これに対しては“第２形式”の適用が要請される．元々“第２形式”は“第１形式”から変数の置換を行って得たものである (式(4.49)-(4.50))．光子場の行列要素(4.142) は $x_1\leftrightarrow x_2$，$\mu\leftrightarrow\nu$ の入れ換えの下で対称なので，こちらには影響は生じない．このような手続きを経て，次式を得る．

$$\begin{aligned}S_{fi}=(-e)^2&\int d^4x_1\int d^4x_2\,\langle 2\gamma|A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)|0\rangle\,(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}\\ &\times\Big[\langle 0|\psi_\beta^{(+)}(x_1)\,\bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2)\,\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1)\,\psi_\delta^{(+)}(x_2)|e^-e^+\rangle\,\theta(t_1-t_2)\\ &\quad-\langle 0|\bar{\psi}_\gamma^{(+)}(x_2)\,\psi_\beta^{(-)}(x_1)\,\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1)\,\psi_\delta^{(+)}(x_2)|e^-e^+\rangle\,\theta(t_2-t_1)\Big]\end{aligned} \tag{4.148}$$

θ関数は，次のように定義される．

$$\theta(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases} \tag{4.149}$$

電子場の行列要素を簡単にするための作業がまだ残っている．それは $\psi_\beta^{(+)}(x_1)\,\bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2)$ (もしくは $\bar{\psi}_\gamma^{(+)}(x_2)\,\psi_\beta^{(-)}(x_1)$) と $\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1)\,\psi_\delta^{(+)}(x_2)$ の間に，中間状態として完全系 $\sum_n|n\rangle\langle n|$ を挿入することである．しかし寄与を生じる中間状態が真空状態だけに限定されることは明白である．

$$\begin{aligned}&\langle 0|\psi_\beta^{(+)}(x_1)\,\bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2)\,\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1)\,\psi_\delta^{(+)}(x_2)|e^+e^-\rangle\\ &\quad=\langle 0|\psi_\beta^{(+)}(x_1)\,\bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2)|0\rangle\langle 0|\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1)\,\psi_\delta^{(+)}(x_2)|e^-e^+\rangle\\ &\quad=\langle 0|\psi_\beta^{(+)}(x_1)\,\bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2)|0\rangle\\ &\qquad\times\left[\sqrt{\frac{m}{E_+V}}\,\bar{v}_\alpha^{(s_+)}(\mathbf{p}_+)\,e^{ip_+\cdot x_1}\right]\left[\sqrt{\frac{m}{E_-V}}\,u_\delta^{(s_-)}(\mathbf{p}_-)\,e^{ip_-\cdot x_2}\right]\end{aligned} \tag{4.150}$$

第２項についても同様の簡約化ができ，Ｓ行列の式は最終的に次のようになる．

$$
\begin{aligned}
S_{fi} = (-e)^2 &\int d^4x_1 \int d^4x_2 \\
&\times \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_1 V}} \epsilon_\mu^{(\alpha_1)} e^{-ik_1\cdot x_1} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_2 V}} \epsilon_\nu^{(\alpha_2)} e^{-ik_2\cdot x_2} \right) + \left\{ \begin{matrix} k_1 \leftrightarrow k_2 \\ \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2 \end{matrix} \right\} \right] \\
&\times \left[\sqrt{\frac{m}{E_+V}} \bar{v}_\alpha^{(s+)}(\mathbf{p}_+) e^{ip_+\cdot x_1} \right] (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \\
&\times \left[\langle 0|\psi_\beta^{(+)}(x_1)\bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2)|0\rangle \theta(t_1-t_2) - \langle 0|\bar{\psi}_\gamma^{(+)}(x_2)\psi_\beta^{(-)}(x_1)|0\rangle \theta(t_2-t_1) \right] \\
&\times (\gamma_\nu)_{\gamma\delta} \left[\sqrt{\frac{m}{E_-V}} u_\delta^{(s-)}(\mathbf{p}_-) e^{ip_-\cdot x_2} \right]
\end{aligned}
\tag{4.151}
$$

上式では，式(4.142) の第２項にあたる部分を $\{k_1 \leftrightarrow k_2, \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2\}$ と略記した．

式(4.151) には，馴染みやすい部分とそうでない部分がある．まず $\left(1/\sqrt{2\omega_1 V}\right)\epsilon_\mu^{(\alpha_1)} e^{-ik_1\cdot x_1}$ などが現れることは第２章から既に慣れ親しんでおり，$(\mathbf{k}_1, \alpha_1)$ の実光子が x_1 において放射される場合に予想されるものである．$\sqrt{m/E_-V}\,ue^{ip_-\cdot x_2}$ と $\sqrt{m/E_+V}\,\bar{v}e^{ip_+\cdot x_1}$ も単に入射電子の x_2 における消滅と，入射陽電子の x_1 における消滅を表していることは，外場による対消滅の式(4.114) の場合と同様である．初めの４つの電子-陽電子演算子の中から，我々が２つ ($\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1)$ と $\psi_\delta^{(+)}(x_2)$) を入射した陽電子と電子の消滅に充てたことは明らかである．入射粒子の消滅に費やされなかった残りの２つの演算子 $\psi_\beta(x_1)$ と $\bar{\psi}_\gamma(x_2)$ は，式の中で「対(つい)にされ，両側から真空状態に挟まれて」いる．t_1 が t_2 よりも後の時刻の場合，第１項の方の真空期待値が採用される．そこではまず入射した電子を消滅させるちょうどその時空点 x_2 において $\bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2)$ が電子を生成し，同時にそこでひとつの光子が放射される．相手方の演算子 $\psi_\beta^{(+)}(x_1)$ は，x_2 において生成された電子が，その後 x_1 において消滅することを表しているが，その時空点において入射してきた陽電子も消滅し，もうひとつの光子が放射される．したがって $t_1 > t_2$ のときの真空期待値 $\langle 0|\psi_\beta^{(+)}(x_1)\bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2)|0\rangle$ は，中間状態における時空点 x_2 から x_1 への“仮想電子”(virtual electron) の伝播を表している．この様子を図4.4(a) に示すが，x_2 と x_1 を結ぶ“内線”(internal line) が，時空点 x_2 から x_1 への仮想電子の伝播を表している．同様に $t_2 > t_1$ であれば $\langle 0|\bar{\psi}_\gamma^{(+)}(x_2)\psi_\beta^{(-)}(x_1)|0\rangle$ が図4.4(b) のように x_1 から x_2 への仮想陽電子の伝播を表す．両方の場合において，生成演算子 ($\psi_\beta^{(-)}(x_1)$ や $\bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2)$) が消滅演算子 ($\psi_\beta^{(+)}(x_1)$ や $\bar{\psi}_\gamma^{(+)}(x_2)$) よりも時間的に先行して作用を及ぼすことに注意されたい．これは“因果律”の要請に整合している．

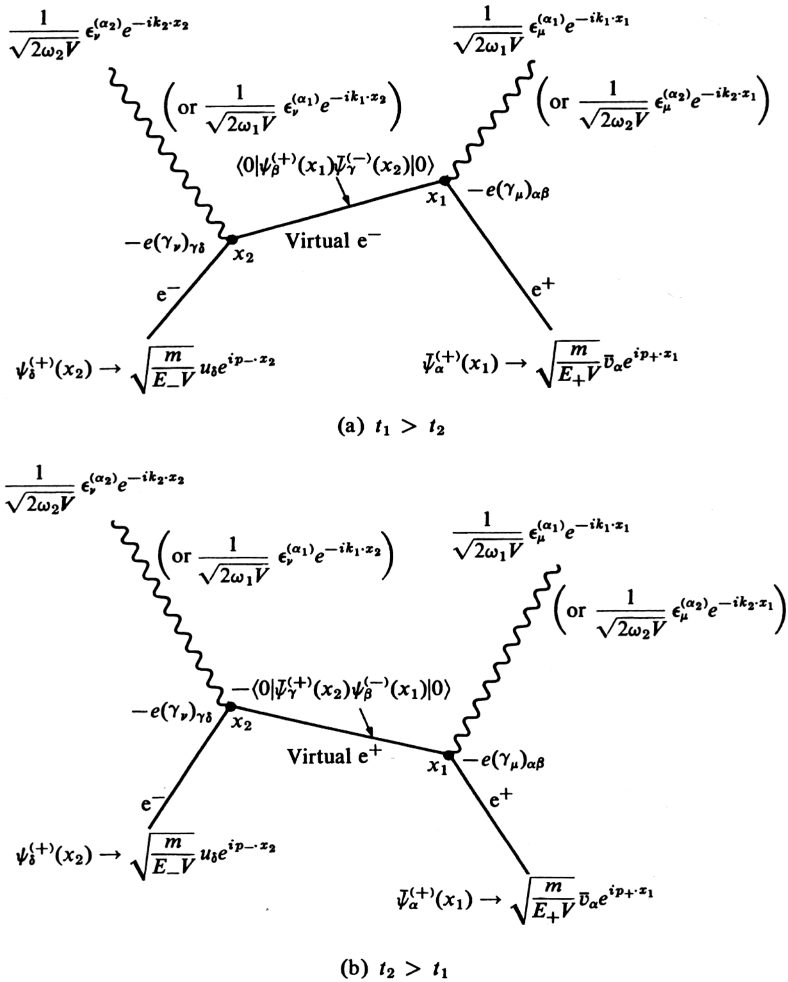


図4.4　2光子放射型e^-e^+対消滅の時間順序化グラフ(time-ordered graph).

電子の伝播関数　行列要素の計算技法は，式(4.151)に見られる2つの真空期待値の項を“組み合わせて”ひとつの表現に統合することによって大躍進（ブレイクスルー）を遂げることになる．ここで$t_1 > t_2$の場合のx_2からx_1への仮想電子の伝播と，$t_2 > t_1$の場合のx_1からx_2への仮想陽電子の伝播を(旧式の摂動論のように“個別に”扱うのではな

く)“一緒に”扱うことを提案しよう．このことを念頭に置いて，フェルミオン演算子の“時間順序化積”(Wick time-ordered product：T積)を，次のように定義する．

$$T\big(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')\big) = \begin{cases} \psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x') & \text{for} \quad t > t' \\ -\bar{\psi}_\beta(x')\psi_\alpha(x) & \text{for} \quad t' > t \end{cases} \tag{4.152}$$

演算子の(+)の部分((−)の部分)を真空状態に左から(右から)作用させても寄与を生じないので，上のT積の真空期待値は，次のようになる．

$$\langle 0|T\big(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')\big)|0\rangle = \begin{cases} \langle 0|\psi_\alpha^{(+)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(-)}(x')|0\rangle & \text{for} \quad t > t' \\ -\langle 0|\bar{\psi}_\beta^{(+)}(x')\psi_\alpha^{(-)}(x)|0\rangle & \text{for} \quad t' > t \end{cases} \tag{4.153}$$

これと全く同じ形の部分を，式(4.151)の中に見て取ることができる．式(4.153)を計算してみよう．$t > t'$ の場合は，次のようになる．

$$\begin{aligned} &\langle 0|\psi_\alpha^{(+)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(-)}(x')|0\rangle \\ &= \frac{1}{V}\Big\langle 0\Big|\sum_{\mathbf{p},s}\sqrt{\frac{m}{E}}\,b^{(s)}(\mathbf{p})\,u_\alpha^{(s)}(\mathbf{p})\exp(ip\cdot x) \\ &\qquad\times\sum_{\mathbf{p}',s'}\sqrt{\frac{m}{E'}}\,b^{(s')\dagger}(\mathbf{p}')\,\bar{u}_\beta^{(s')}(\mathbf{p}')\exp(-ip'\cdot x')\Big|0\Big\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\,m\int\frac{d^3p}{E}\sum_s u_\alpha^{(s)}(\mathbf{p})\,\bar{u}_\beta^{(s)}(\mathbf{p})\exp\big[ip\cdot(x-x')\big] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2E}\big[-i\gamma\cdot\mathbf{p} - i\gamma_4(iE) + m\big]_{\alpha\beta}\exp\big[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - iE(t-t')\big] \end{aligned} \tag{4.154}$$

上式においては，

$$\langle 0|b^{(s)}(\mathbf{p})b^{(s')\dagger}(\mathbf{p}')|0\rangle = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}\delta_{ss'} \tag{4.155}$$

と，よく知られた運動量空間における状態和の規則，

$$\lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}} = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3} \tag{4.156}$$

および式(4.72)を用いた．$t' > t$ の場合も同様にして，式(4.76)を利用して次のように計算される．

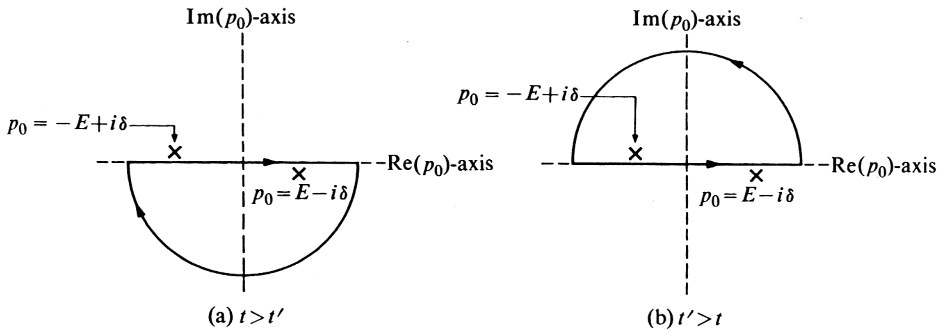


図4.5　式(4.159) における p_0 の積分路.

$$
\begin{aligned}
&-\langle 0|\bar{\psi}^{(+)}_\beta(x')\,\psi^{(-)}_\alpha(x)\,|0\rangle \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^3}\,m\int\frac{d^3p}{E}\sum_s v^{(s)}_\alpha(\mathbf{p})\,\bar{v}^{(s)}_\beta(\mathbf{p})\,\exp\left[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x}) - iE(t'-t)\right] \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^3}\,m\int\frac{d^3p}{E}\left[-\left(\frac{i\gamma\cdot p+m}{2m}\right)_{\alpha\beta}\right]\exp\left[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x}) - iE(t'-t)\right] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2E}\left[-i\gamma\cdot\mathbf{p} - i\gamma_4(-iE) + m\right]_{\alpha\beta}\exp\left[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - i(-E)(t-t')\right]
\end{aligned}
\tag{4.157}
$$

最後の行では積分変数の符号を変更して ($\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$)，式(4.154) と似た体裁の式にした．これから真空期待値(4.153) が，次の4次元積分に等しいことを示してみる．

$$
-\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{(-i\gamma\cdot p+m)_{\alpha\beta}\exp[ip\cdot(x-x')]}{p^2+m^2-i\epsilon} \tag{4.158}
$$

ϵ は無限小の正の実数であり，また $p^2 = p\cdot p = |\mathbf{p}|^2 - p_0^2$ である．p_0 は一般に $\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$ とは“一致しない”．まず p_0 に関する積分を考える．

$$
-\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^3p\int dp_0\,\frac{(-i\gamma\cdot p+m)_{\alpha\beta}\exp[ip\cdot(x-x')]}{-\left(p_0-\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)\left(p_0+\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\right)-i\epsilon} \tag{4.159}
$$

被積分関数を複素変数 p_0 の関数と見なすと，次の2箇所に極を持つ．

$$
\begin{aligned}
p_0 &= \sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2} - i\delta = E - i\delta \\
p_0 &= -\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2} + i\delta = -E + i\delta
\end{aligned}
\tag{4.160}
$$

ここで $\delta = (\epsilon/2E)$ である[†]．E は p_0 と違って変数ではなく，これまでと同様に $\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ と解釈する．もちろん必要とされるのは，複素p_0平面における実軸に沿った積分である．これは閉路積分の方法を用いて求めることができる．$t > t'$ であれば，p_0面の正の虚数の側 (上半面側) で $\exp[-ip_0(t-t')]$ が寄与を持ってしまうので，積分路を図4.5(a) のように実軸と下半面側の半円によって構成しなければならない．したがって $t > t'$ の場合には，実軸の下側の極 $p_0 = E - i\delta$ からの寄与だけを考慮すればよい．その結果，式(4.159) は，

$$\frac{(2\pi i)(-i)}{(2\pi)^4}\int\frac{d^3p}{2E}\Big[-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p} - i\gamma_4(iE) + m\Big]_{\alpha\beta}\exp\Big[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - iE(t-t')\Big] \tag{4.161}$$

となるが，これは式(4.154) と一致している．$t' > t$ の場合も同様に図4.5(b) の積分路を考えれば，4次元積分(4.158) が式(4.157) に一致することを容易に確認できる．

以上をまとめると，次の式，

$$\langle 0|T\Big(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')\Big)|0\rangle = -\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{-i\gamma\cdot p + m}{p^2 + m^2 - i\epsilon}\exp\Big[ip\cdot(x-x')\Big] \tag{4.162}$$

が「t と t' の前後関係によらず成立する」ことが証明された．式(4.162) は“電子の伝播関数”(electron propagator) と呼ばれる．これは4元座標の差 $x - x'$ に依存して決まる 4×4 行列である．式(4.162) は多くの文献において $-\frac{1}{2}(S_{\mathrm{F}}(x-x'))_{\alpha\beta}$ と書かれている (添字の F は Feynman に因む)[16)]．“電子の伝播関数”が，20世紀の物理学において最も重要な関数のひとつであることは疑いようがない．4.6節において導入する予定の“共変な光子の伝播関数”と併せて，これらの関数は，我々がそれ以前に扱うことのできなかった多様な問題を手がけることを可能にした．この関数

[†](訳註) 式(4.159) の被積分関数は，そのままで極が分かる形ではないが，分母において，$\{p_0-(E-i\delta)\}\{p_0+(E-i\delta)\} = p_0^2-(E-i\delta)^2 \approx p_0^2-E^2+2iE\delta = (p_0-E)(p_0+E)+2iE\delta$ という近似の逆を考えてもよいし，ϵ を持ち出さずに最初からこのように δ を導入してもよい．結果的に微小因子を除いた極限における積分値が得られれば問題はない．

閉曲線内の極が1個以下の場合について Cauchy (コーシー) の閉路積分の公式を確認しておくと，$f(z)$ が正則関数で z_0 が複素平面内の単純閉曲線 C の内側にあるならば $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz = \pm 2\pi i f(z_0)$ である．符号は周回積分の向きによって決まり，反時計回りの場合にプラスになる．z_0 が C の外にある場合には積分はゼロになる．図4.5 の (a) と (b) の積分路のうち，半円半径を無限大にすると半円の周回部分からの寄与がゼロになる方を選べば，この極限において [実軸上積分値] → [閉路積分値] となるので，実軸に沿った積分値が求まる．

16) 時々，式(4.162) そのものを $(S_{\mathrm{F}}(x-x'))_{\alpha\beta}$ と表記する文献も見かける．本書における S_{F} の定義は，F. J. Dyson の原論文の定義に合わせてある．(以下訳註) 添字 F を付けるのは，不変S関数 (p.192参照) と区別するためである．文献によって符号や係数の違いはあり得るが，$S(x-x') \propto \{\psi(x), \bar{\psi}(x')\}$，$S_{\mathrm{F}}(x-x') \propto \langle 0|T(\psi(x)\bar{\psi}(x'))|0\rangle$ である (添字 α, β 省略)．

の座標 (x) 空間における具体的な形を第2種Hankel（ハンケル）関数を用いて書くこともできるが，Fourier積分形の式(4.162) の方が有用である‡．次節において，この電子の伝播関数がDirac方程式に対するGreen関数にあたることを示す予定である．

2光子放射型e^-e^+対消滅に戻って，S行列の要素(4.151) を具体的に書いてみる．

$$
\begin{aligned}
S_{fi} &= (-e)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_1 V}}\,\epsilon_\mu^{(\alpha_1)} e^{-ik_1\cdot x_1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_2 V}}\,\epsilon_\nu^{(\alpha_2)} e^{-ik_2\cdot x_2}\right) \\
&\times \left(\sqrt{\frac{m}{E_+V}}\,\bar{v}_\alpha\, e^{ip_+\cdot x_1}\right)(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\langle 0|T\left(\psi_\beta(x_1)\bar{\psi}_\gamma(x_2)\right)|0\rangle(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}\left(\sqrt{\frac{m}{E_-V}}\,u_\delta\, e^{ip_-\cdot x_2}\right) \\
&\quad + \begin{Bmatrix} k_1 \leftrightarrow k_2 \\ \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2 \end{Bmatrix} \\
&= (-e)^2 \sqrt{\left(\frac{m}{E_-V}\right)\left(\frac{m}{E_+V}\right)\left(\frac{1}{2\omega_1 V}\right)\left(\frac{1}{2\omega_2 V}\right)} \\
&\quad \times \int d^4x_1 \int d^4x_2\, e^{-ik_1\cdot x_1 - ik_2\cdot x_2}\, \epsilon_\mu^{(\alpha_1)}\epsilon_\nu^{(\alpha_2)} e^{-ip_+\cdot x_1 + ip_-\cdot x_2} \\
&\qquad\qquad \times \bar{v}\gamma_\mu \left(-\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4q\, \frac{e^{iq\cdot(x_1-x_2)}(-i\gamma\cdot q + m)}{q^2 + m^2 - i\epsilon}\right)\gamma_\nu u \\
&\quad + \begin{Bmatrix} k_1 \leftrightarrow k_2 \\ \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2 \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.163}
$$

最後から2行目は，通常の行列積の計算規則を適用すべきものと見る．式(4.163) の中に現れる真空期待値は，明白な共変性を備えているという点において，極めて好ましい形をしている．次のことに注意を向けると，上式の真価をさらによく認識できるであろう．

‡(訳註) $x - x'$ の関数の形にすると光円錐面において発散する $\delta(s^2)$ の項とHankel関数 $H^{(2)}(-ims)$ の項が生じ ($s = \{(x-x')\cdot(x-x')\}^{1/2}$ は不変距離)，光円錐内部 (タイムライク：s が純虚数) の領域では振動的，光円錐の外部 (スペースライク：s が実数) では減衰的な挙動を示す．一方，電子の伝播関数の4次元Fourier成分 (式(4.162) 参照) は分母が (p^2+m^2) であり (あるいは形式的に‘約分’をすれば分母は $(i\gamma\cdot p + m)$ になる．式(4.256)-(4.257)参照)，これは $p^2 + m^2 = -\nabla^2 + \partial^2/\partial t^2 + m^2 \approx 0$，すなわち分散関係が相対論条件近傍の $k^2 - \omega^2 + m^2 \approx 0$ である“仮想波”成分が伝播し易いことを含意する．興味深い事実を指摘しておくと，相対論的な自由場の波面の位相速度は $c(1 + m^2c^2/\hbar^2k^2)^{1/2}$ であって $m > 0$ ならば常に光速“以上”であるし，Fourier展開に利用する平面波の“成分”は，相対論的な条件とは無関係にあらゆる分散関係を想定してよい．もちろん相対論的な波の群速度は光速以下であり，因果的な議論をする場合に恣意的に抽出した成分だけに注目することには意味がないが，式(4.162) は $\omega - k$ 分散関係が相対論条件から外れた平面波成分も，スペクトル的に急速には減衰しないこと (逆冪程度にすぎない) を示しているとも言える (次の脚註も参照)．

(i) $x_1 - x_2$ が空間的(スペースライク)であるとき，t_2 が t_1 の前か後かという区別は Lorentz不変な概念ではない.

(ii) 反交換子 $\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\}$ とは異なり，電子の伝播関数は空間的(スペースライク)な隔たりがあってもゼロにはならない[17]. (伝播関数の座標(x)空間における具体的な形を調べれば分かる).

前者を言い換えると，図4.4 (p.269) の (a) と (b) を区別することは Lorentz不変な操作ではない. 具体的には，仮想電子が x_2 から x_1 へ伝播する過程を他の Lorentz 座標系から観測すると，仮想“陽電子”が x_1 から x_2 へ伝播する過程として見えることもあり得る[18]. しかしながら図4.4 の (a) と (b) を“一緒に”考えるならば，2つの真空期待値が明白な共変性を持つ形へと統合される.

図4.4 の (a) と (b) を一緒にすることで Lorentz共変性を備えた数学的に単純な表式が得られたという事実から，次の観点が与えられる. $t_1 > t_2$ のときには仮想粒子である電子が x_2 から x_1 へ伝播し，$t_2 > t_1$ のときには仮想粒子である陽電子が逆に x_1 から x_2 へ伝播すると言う代わりに，次のように言ってもよい.

(i) t_1 と t_2 の前後関係には依らず，常に電子が x_2 から x_1 へ伝播する.

(ii) たまたま t_2 が t_1 よりも後であれば，電子は“時間を溯行(そこう)する (さかのぼる)”.

後者の場合，仮想電子の波動関数は負エネルギー電子のそれであり，$v^{(s)}(\mathbf{p})$ $(= \pm u^{(3,4)}(-\mathbf{p}))$ が現れる. この観点からすると，時間に順行する陽電子 (たとえば図4.4(b) のような仮想陽電子) は“時間を溯行する”負エネルギー電子と等価である. この解釈は，元々は E. C. G. Stueckelberg(シュテュッケルベルク)が 1941年に提案したものであるが，これが次節で論じる Feynman による時空的アプローチの基礎となる[19].

---

[17] 空間的 (スペースライク) に隔たっていても電子の伝播関数がゼロにならないことの理由について，Feynman (1961b), pp.83-86 において簡明な議論が与えられている. (以下訳註) 古典的な相対論から見て不自然な“伝播”に関する Feynman の言及は，ごくあっさりした短いものであるが，その意図を汲んで現代風の言い回しに直すと次のようなことである. 着目している電子が，仮想的に存在し得る量子力学的に“もつれた”電子-陽電子対の陽電子の方と結合して消滅するならば，仮想対の相手方の，相対論的には瞬時に情報伝達の不可能な時空点へと既に隔たっている電子の存在が即座に確定するという形で，潜在的に直接の光円錐の制約を離れた全時空点へ“伝播”の影響が及ぶ可能性があってもよい.

[18] この意味では，我々は G. Källén (チェレン) のような“純正主義者”の次のような見解に賛成する.「読者に警告しておくが，ダイヤグラムが粒子のある時空点から他の時空点への伝播を表しているという，過度に単純化された図式的解釈を信用してはならない. そのような描像は，対象とする過程に含まれる物理について，深刻な誤解をもたらすこともあり得る.」

[19] 時間順序の逆転の概念を除き，中間状態に現れる仮想陽電子を負エネルギー電子として扱えることに最初に言及している文献は，P. A. M. Dirac が 1930年に発表した論文である. 3.9節の Thomson 散乱に関する議論 (p.63) を再度参照されたい.

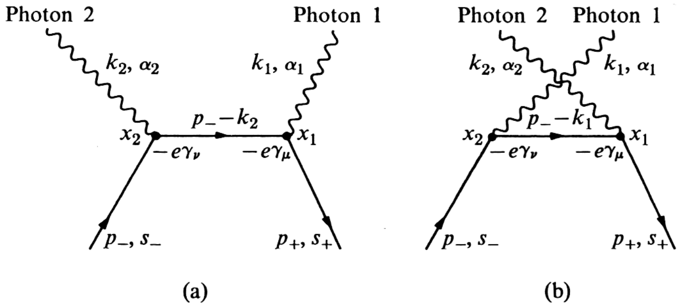


図4.6　２光子放射型e^-e^+対消滅を表す Feynmanグラフ．t_2 は t_1 の前でも後でもよい．

２つの時空点 x_1 と x_2 を結ぶ線分 (内線) を与える際に，その仮想電子が x_1 から x_2 へ伝播するのか，x_2 から x_1 へ伝播するのかは，入射・放出粒子との関係などから決まっているはずである．これを表すために，ダイヤグラムにおいて線分を“矢”で表現すればよい．x_2 から x_1 へ到達する矢があれば，それは次の２通りの状況のうちのひとつを意味する．すなわち電子が時間に順行して x_2 から x_1 へ伝播するか ($t_1 > t_2$)，もしくは陽電子が時間に順行して x_1 から x_2 へ伝播する ($t_2 > t_1$)．t_1 が t_2 の前か後かを問わなければ，図4.4 (p.269) の (a) と (b) はトポロジー的に等価である．したがって両者をまとめた過程を図4.6(a) のように表し，t_2 が t_1 の前でも後でもよいものと見なせばよい．仮想的でない実の電子や実の陽電子を表す外線 (external line) も矢で表しておくと便利である．外線の矢の向きが t の増加する向き (図では上向きにする) と一致していれば，その外線は実電子を表し．矢が t の増加する向きと反対を向いていれば，その外線は実陽電子を表すものとする．これらのことは図4.6 を見れば明確に分かる．この“矢の規則”を簡単に要約すると，$\psi(x)$ ($\bar{\psi}(x)$) の作用を，時空点 x に入る (x から出る) 矢に対応させるということになる．それは演算子の作用が消滅か生成かによらず，また消滅・生成する粒子が実粒子か仮想粒子か，電子か陽電子かにもよらない．

ダイヤグラムに矢を導入することで，S行列の要素(4.163) の中の各因子を順を追って確認することが容易になる．覚えておく必要があるのは“矢をたどる”ことだけである．入射電子の波動関数は x_2 で消滅し，$-e\gamma_\nu$ は x_2 における輻射場との相互作用を表す．x_2 から x_1 へ仮想電子が伝播し ($t_2 > t_1$ の場合は陽電子の逆行と解釈する)，$-e\gamma_\mu$ は x_1 における輻射場との２回目の相互作用を表す．最後に x_1 において消滅する入射陽電子が随伴波動関数によって表される．この“矢をたどる”処方を

受け入れるならば，もはや行列の添字をあらわに書く必要はなくなる.

図4.4 の (a) と (b) が，図4.6(a) に示す単一のグラフに統合できることを見てきた. しかしこの電子-陽電子系の輻射場との x_1 における相互作用が光子 1 の放射を表すのか，光子 2 の放射を表すのかについては区別が必要である. この理由から実際には図4.6 の (a) と (b) のような，トポロジー的に等価ではない２つのグラフを考える必要がある. S行列要素の式(4.163) では $k_1 \leftrightarrow k_2$，$\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$ と記した項が図4.6(b) に対応する. 図4.6(b) は“交差ダイヤグラム”(crossed diagram) と呼ばれることがある.

２光子放射型e^-e^+対消滅を表す$\mathcal{M}$行列 S行列の式(4.163) の計算を実行してみよう. まず時空座標に関する積分を行うことにする. x_1 と x_2 に依存しない因子を省くと，図4.5(a) (p.271) に対応する積分計算は,

$$\int d^4x_1 \int d^4x_2 \exp\left[i(-k_1 + p_+ + q)\cdot x_1\right] \exp\left[i(-k_2 + p_- - q)\cdot x_2\right]$$
$$= (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left[q - (-p_+ + k_1)\right](2\pi)^4 \delta^{(4)}\left[q - (p_- - k_2)\right] \tag{4.164}$$

となる. ２つの $(2\pi)^4$ のうちの一方は，すぐ後で共変な $\mathcal{M}$ 行列を定義する際に分離することになる. もう一方の $(2\pi)^4$ は電子の伝播関数を表す Fourier 積分の式に付いている $1/(2\pi)^4$ と相殺する. 続いてエネルギー-運動量積分 (q 空間積分) を実行すると，式(4.164) における２つの $\delta^{(4)}$ のうちの一方 (たとえば２番目のもの) が消えて q が $p_- - k_2$ に置き換わる. これらの４次元デルタ関数は，各結節点（ヴァーテックス）(vertex) においてエネルギーと運動量が“両方とも”保存されることを意味しているが，この性質は中間状態においてエネルギーが“保存しない”旧式の摂動論の技法とは著しい対照をなす[20). 交差ダイヤグラム (図4.6(b)) も同様の方法で扱われるが，この場合は q が $p_- - k_1$ に置き換わる. Λハイペロンの崩壊の場合と同様に，共変行列要素 $\mathcal{M}_{fi}$ を次のように定義する.

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_- + p_+ - k_1 - k_2)\sqrt{\left(\frac{m}{E_-V}\right)\left(\frac{m}{E_+V}\right)\left(\frac{1}{2\omega_1 V}\right)\left(\frac{1}{2\omega_2 V}\right)}\,\mathcal{M}_{fi} \tag{4.165}$$

---

20) この旧式の摂動論と現代的な (共変な) 摂動論の重要な違いの問題については，4.6節で再び取り上げる予定である. (以下訳註) ここではエネルギーの保存／非保存の問題について，次のことだけを指摘しておく. 旧式の摂動論 (2.4節) は任意の有限時間 $\Delta t = t - t_0$ における遷移を扱える形式であるのに対し，本章の共変な摂動論では $\Delta t \to \infty$ の極限だけを扱うことを前提としてS行列を導入し (式(4.34))，時刻依存特性をあらわに問題にしない形式を構築している. 不確定性関係 $\Delta t \Delta E \geq (1/2)\hbar$ の下で，前者では必然的にエネルギーが確定せず，後者においてのみエネルギーを確定させた扱い方が可能となる.

ここで扱う過程に関してもδ_{fi}はゼロである．共変行列要素の式は，次のような単純な形で与えられる．

$$-i\mathcal{M}_{fi} = (-e)^2 \bar{v}^{(s_+)}(\mathbf{p}_+)\left[\gamma\cdot\epsilon^{(\alpha_1)} \frac{-i\gamma\cdot(p_- - k_2)+m}{i\left[(p_- - k_2)^2+m^2-i\epsilon\right]}\gamma\cdot\epsilon^{(\alpha_2)} + \gamma\cdot\epsilon^{(\alpha_2)} \frac{-i\gamma\cdot(p_- - k_1)+m}{i\left[(p_- - k_1)^2+m^2-i\epsilon\right]}\gamma\cdot\epsilon^{(\alpha_1)}\right] u^{(s_-)}(\mathbf{p}_-) \tag{4.166}$$

第1項と第2項がそれぞれ図4.6の(a)と(b)に対応する．中間状態における仮想電子の4元運動量が$q = p_- - k_2$もしくは$p_- - k_1$であることに注意してもらいたい．これら2つの項の相対的な符号は正であり，これは光子がBose-Einstein（ボーズ アインシュタイン）統計に従うことから想定されることである．輻射場が交換する形式を採用しているので，自動的にこのような正しい結果が得られている．

Compton散乱（光子-電子散乱）の行列要素　2光子放射型e^-e^+対（つい）消滅の例をひとつ見ただけは，一般のS行列に含まれる電子場が，必ずこのように奇跡的な組合せを形成して，共変な電子の伝播関数を含むエレガントな式に帰着することを完全には納得できないかも知れない．この理由から，2光子放射型e^-e^+対消滅の断面積を求める前に，もうひとつの2次の行列要素の例としてCompton（コンプトン）散乱を調べてみる．今度は式(4.140)に相当するS行列の元の形が，次のように与えられる．

$$S_{fi} = (-e)^2 \int d^4x_1 \int_{t_2<t_1} d^4x_2 \langle\gamma' e^{-\prime}|\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)A_\mu(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)A_\nu(x_2)|\gamma e^-\rangle \tag{4.167}$$

$|\gamma e^-\rangle$と$|\gamma' e^{-\prime}\rangle$はそれぞれ$\gamma + e^-$系の始状態および終状態を表す．$t_1$が$t_2$より後の時刻であることを念頭に置いて電子場の演算子を見ると，$\psi(x_1)$は（終状態に陽電子が含まれないので）陽電子を生成できず，$\bar{\psi}(x_2)$は（始状態に陽電子が含まれないので）陽電子を消滅させられない．したがって$\psi(x_1)$と$\bar{\psi}(x_2)$をそれぞれ$\psi^{(+)}(x_1)$と$\bar{\psi}^{(-)}(x_2)$に置き換えてよい．そして始状態も終状態も電子がひとつある状態なので，電子と陽電子に関わる演算子積全体は，2つの(+)演算子（消滅演算子）と2つの(−)演算子（生成演算子）で構成されなければならない．したがって，ここで寄与を持つ電子-陽電子場の演算子積は次の2通りである．

$$(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}\bar{\psi}^{(-)}_\alpha(x_1)\psi^{(+)}_\beta(x_1)\bar{\psi}^{(-)}_\gamma(x_2)\psi^{(+)}_\delta(x_2) \tag{4.168}$$

$$(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}\bar{\psi}^{(+)}_\alpha(x_1)\psi^{(+)}_\beta(x_1)\bar{\psi}^{(-)}_\gamma(x_2)\psi^{(-)}_\delta(x_2) \tag{4.169}$$

式(4.168) を始状態と終状態で挟むと，次のようになる.

$$
\begin{aligned}
&(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}\,\langle \mathrm{e}^{-\prime}|\bar\psi^{(-)}_\alpha(x_1)\,\psi^{(+)}_\beta(x_1)\,\bar\psi^{(-)}_\gamma(x_2)\,\psi^{(+)}_\delta(x_2)|\mathrm{e}^-\rangle\\
&\quad=(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}\,\langle \mathrm{e}^{-\prime}|\bar\psi^{(-)}_\alpha(x_1)|0\rangle\,\langle 0|\psi^{(+)}_\beta(x_1)\,\bar\psi^{(-)}_\gamma(x_2)|0\rangle\,\langle 0|\psi^{(+)}_\delta(x_2)|\mathrm{e}^-\rangle\\
&\quad=\left[\sqrt{\frac{m}{E'V}}\,\bar u'_\alpha e^{-ip'\cdot x_1}\right](\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\,\langle 0|\psi^{(+)}_\beta(x_1)\,\bar\psi^{(-)}_\gamma(x_2)|0\rangle\,(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}\left[\sqrt{\frac{m}{EV}}\,u_\delta e^{ip\cdot x_2}\right]
\end{aligned}
\tag{4.170}
$$

上式は t_1 ((+)演算子すなわち消滅演算子の時刻) が t_2 ((−)演算子すなわち生成演算子の時刻) よりも後の場合 ($t_1 > t_2$) に寄与を持つ．式(4.169) については $x_1 \leftrightarrow x_2$, $\mu \leftrightarrow \nu$, $\alpha\beta \leftrightarrow \gamma\delta$ という入れ換えを行う.

$$
\begin{aligned}
&(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}\,\bar\psi^{(+)}_\gamma(x_2)\,\psi^{(+)}_\delta(x_2)\,\bar\psi^{(-)}_\alpha(x_1)\,\psi^{(-)}_\beta(x_1)\\
&\quad=(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}\Big[-\bar\psi^{(+)}_\gamma(x_2)\,\bar\psi^{(-)}_\alpha(x_1)\,\psi^{(+)}_\delta(x_2)\,\psi^{(-)}_\beta(x_1)\\
&\qquad\qquad+\bar\psi^{(+)}_\gamma(x_2)\,\{\psi^{(+)}_\delta(x_2),\,\bar\psi^{(-)}_\alpha(x_1)\}\,\psi^{(-)}_\beta(x_1)\Big]\\
&\quad=(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}\Big[-\bar\psi^{(-)}_\alpha(x_1)\,\bar\psi^{(+)}_\gamma(x_2)\,\psi^{(-)}_\beta(x_1)\,\psi^{(+)}_\delta(x_2)\\
&\qquad\qquad+\bar\psi^{(+)}_\gamma(x_2)\,\{\psi^{(+)}_\delta(x_2),\,\bar\psi^{(-)}_\alpha(x_1)\}\,\psi^{(-)}_\beta(x_1)\Big]
\end{aligned}
\tag{4.171}
$$

ここで $\{\psi^{(+)}_\delta(x_2),\,\bar\psi^{(-)}_\alpha(x_1)\}$ が $x_1 - x_2$ を引数とする単なる c-数関数であり，$\bar\psi^{(+)}_\gamma$ と $\psi^{(-)}_\beta$ がそれぞれ陽電子を消滅・生成させることを思い出そう．これは Compton 散乱において，式(4.171) の第２項が寄与を持たないことを意味する[21)]．式(4.171) を電子の始状態と終状態で挟むと，

$$
\begin{aligned}
&(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}\,\langle \mathrm{e}^{-\prime}|-\bar\psi^{(-)}_\alpha(x_1)\,\bar\psi^{(+)}_\gamma(x_2)\,\psi^{(-)}_\beta(x_1)\,\psi^{(+)}_\delta(x_2)|\mathrm{e}^-\rangle\\
&\quad=\left[\sqrt{\frac{m}{E'V}}\,\bar u'_\alpha e^{-ip'\cdot x_1}\right](\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\,\langle 0|-\bar\psi^{(+)}_\gamma(x_2)\,\psi^{(-)}_\beta(x_1)|0\rangle\,(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}\left[\sqrt{\frac{m}{EV}}\,u_\delta e^{ip\cdot x_2}\right]
\end{aligned}
\tag{4.172}
$$

となる．上式は t_2 ((+)：消滅) が t_1 ((−)：生成) より後の時刻の場合に寄与が生じる．ここでも $\mathrm{e}^-\mathrm{e}^+$ 対消滅の問題と同様に，いくつかの場の演算子が入射電子の消滅や放出電子の生成に充てられ，残りの演算子は仮想電子 ($t_1 > t_2$ の場合) や仮想陽電子 ($t_2 > t_1$ の場合) の生成・消滅に充てられる形に帰着している．式(4.170) と式

---

21) これを厳密に証明するには，一般に電子状態は始状態 (b, d) と終状態 (b', d') が異なるので，$\langle 0|b'd'd^\dagger b^\dagger|0\rangle = \langle 0|\{d', d^\dagger\}\{b', b^\dagger\}|0\rangle = 0$ となることを利用する.

(4.172) を一緒にして，光子場の行列要素が $\mu \leftrightarrow \nu$，$x_1 \leftrightarrow x_2$ の入れ換えの下で対称であることを利用すると，t_1 と t_2 の順序関係によらず成立する次式に統合できる．

$$\left[\sqrt{\frac{m}{E'V}}\,\bar{u}'_\alpha e^{-ip'\cdot x_1}\right](\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\langle 0|T\big(\psi_\beta(x_1)\bar{\psi}_\gamma(x_2)\big)|0\rangle(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}\left[\sqrt{\frac{m}{EV}}\,u_\delta e^{ip\cdot x_2}\right] \tag{4.173}$$

光子場の行列要素については，既によく分かっている (2.5節でRayleigh（レイリー）散乱を詳しく論じた)．したがってS行列の要素として次式が与えられる．

$$\begin{aligned}S_{fi} = (-e)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 &\left[\frac{1}{\sqrt{2\omega_1 V}}\,\epsilon_\mu^{(\alpha)} e^{-ik\cdot x_1}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\omega_2 V}}\,\epsilon_\nu^{(\alpha')} e^{-ik'\cdot x_2}\right]\\ &\times\left[\sqrt{\frac{m}{E'V}}\,\bar{u}'_\alpha e^{ip'\cdot x_1}\right](\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\langle 0|T\big(\psi_\beta(x_1)\bar{\psi}_\gamma(x_2)\big)|0\rangle(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}\left[\sqrt{\frac{m}{EV}}\,u_\delta e^{ip\cdot x_2}\right]\\ &+\begin{Bmatrix} k \leftrightarrow k' \\ \alpha \leftrightarrow \alpha' \end{Bmatrix}\end{aligned} \tag{4.174}$$

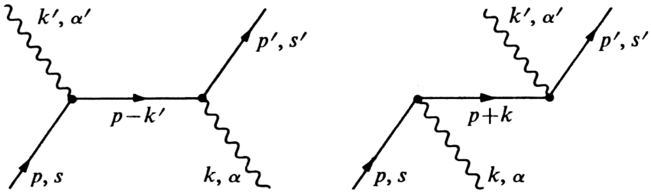
あらかじめ予告したように，最終的なS行列の式は共変な電子の伝播関数を含んでいる．残りの手続きは式(4.164) から式(4.166) までと同様である．積分を実行して $\mathcal{M}$ 行列の要素 (式(4.165) と同様に定義する) を抽出すると，次の結果が得られる．

$$\begin{aligned}-i\mathcal{M}_{fi} = (-e)^2\bar{u}^{(s')}(\mathbf{p}')\Bigg[&\gamma\cdot\epsilon^{(\alpha)}\frac{-i\gamma\cdot(p-k')+m}{i\left[(p-k')^2+m^2-i\epsilon\right]}\gamma\cdot\epsilon^{(\alpha')}\\ &+\gamma\cdot\epsilon^{(\alpha')}\frac{-i\gamma\cdot(p+k)+m}{i\left[(p+k)^2+m^2-i\epsilon\right]}\gamma\cdot\epsilon^{(\alpha)}\Bigg]u^{(s)}(\mathbf{p})\end{aligned} \tag{4.175}$$

この結果をFeynmanダイヤグラムで表してみると図4.7になる．この例でもFeynmanの言うように「導出過程よりも結果の方がはるかに簡単である」．

Feynman規則　式(4.166) と式(4.175) の導出を入念にたどり，さらに類似の問題をいくつか手がけてみれば，読者は以下に示す処方によって $-i\mathcal{M}_{fi}$ の式が得られることを納得できるようになるであろう．まず初めにトポロジー的に等価ではないすべての可能なダイヤグラムを描いてみる．(仮想的でない) 実の電子や陽電子の消滅や生成を表すフェルミオンの外線に，次のように自由粒子スピノルを対応させる．

電子の消滅：	$u^{(s)}(\mathbf{p})$
陽電子の消滅：	$\bar{v}^{(s)}(\mathbf{p})$
電子の生成：	$\bar{u}^{(s)}(\mathbf{p})$
陽電子の生成：	$v^{(s)}(\mathbf{p})$



(a) (b)

図4.7 Compton散乱を表すFeynmanダイヤグラム.

光子の外線には $\epsilon_\mu^{(\alpha)}$ を充てる．各結節点（ヴァーテックス）には $-e\gamma_\mu$ を書く．($-ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu$ からの因子 i は，各次数でS行列要素に付いている係数 $(-i)^n$ と相殺する．式(4.36)参照．)仮想電子（もしくは仮想陽電子）を表す内線 ●——→——● には，

$$\frac{-i\gamma\cdot q + m}{i(q^2 + m^2 - i\epsilon)} \tag{4.176}$$

を充てる．内線が“時間に順行する電子”を表していれば，q は仮想電子の4元運動量である（仮想フェルミオンが陽電子の場合でも，その区別は自動的に考慮される）．各結節点（ヴァーテックス）においてエネルギー-運動量保存を想定する．もし仮想電子のエネルギー-運動量4元ベクトルが，エネルギー-運動量保存の要請から固定されるのであれば（2光子放射型e^-e^+対消滅やCompton散乱はこれに該当する），q空間の積分も因子 $1/(2\pi)^4$ も不要である．他方，仮想4元運動量が固定されない場合には“自明でない積分”が現れ，$d^4q/(2\pi)^4$ の積分を実行する必要が生じる[22)]．各因子の順序に関しては，単に“矢をたどる”ことにすればよい．さらに符号因子を考慮する必要があるが，これは後で説明する．

ここでエネルギー分母を用いる旧式の摂動論と，Lorentz不変な分母を用いる共変な摂動論との関係を論じるのが望ましいかも知れない．しかしこの関係は，スピンがゼロの仮想ボゾンを対象とする方が，より簡単に調べられる．スピンはこの問題に関して不必要な煩雑さをもたらすので，この問題は4.6節まで措いておくことにする．

2光子放射型e^-e^+対消滅の断面積 本節の残りの部分は，2光子放射型e^-e^+対（つい）消滅と，それに関連する過程の詳しい議論に充てる．2光子放射型e^-e^+対消滅の $\mathcal{M}$ 行列要素(4.166)と微分断面積との関係は，前節で扱った Λ ハイペロンの崩壊の場合と

22) このような自明でない積分の例を4.7節で見る予定である．

同様の方法によって得られる．唯一の新たな特徴は，２つのビームの粒子の流れが互いにどのくらいの密度・頻度で衝突し合うかを示す流束密度が，両者の“相対速度”$v_{\rm rel}$ を用いて $v_{\rm rel}/V$ と与えられることである．この相対速度は，採用する座標系において観測される電子の速度と陽電子の速度の差である．式(4.128) と同様にして次式を得る[§]．

$$d\sigma = (2\pi)^4 \frac{1}{v_{\rm rel}} \frac{1}{2E_+} \frac{1}{2E_-} |\mathcal{M}_{fi}|^2 (2m)^2 \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2\omega_1} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2\omega_2} \delta^{(4)}(p_+ + p_- - k_1 - k_2) \tag{4.177}$$

上式は，２つの入射ビームが同一直線上で対向している場合に，任意の座標系において成立する．重心系 (center-of-mass [CM] system) における相対速度は，

$$v_{\rm rel} = \frac{|\mathbf{p}_+|}{E_+} + \frac{|\mathbf{p}_-|}{E_-} = \frac{|\mathbf{p}|E_{\rm tot}}{E_+E_-} \qquad \text{(CM)} \tag{4.178}$$

と表される．ここでは $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}_+| = |\mathbf{p}_-|$ である．重心系において $v_{\rm rel}$ は１以上になり得ることを確認しておこう．すなわち相対速度は光速を超えてもよい．一方，いわゆる実験室系 (laboratory system) において静止状態の電子 ($\mathbf{p}_- = \mathbf{0}$) に対して陽電子を衝突させる状況を考えると，相対速度は単純に，

$$v_{\rm rel} = \frac{|\mathbf{p}_+|}{E_+} \qquad \text{(Lab)} \tag{4.179}$$

と表される．２つの入射ビームが同一直線上で対向している場合に，任意の Lorentz 座標系から見て $v_{\rm rel}E_+E_-$ という量が等しくなることは興味深い．次式を証明することは難しくない[†]．

$$v_{\rm rel}E_+E_- = \sqrt{(p_+ \cdot p_-)^2 - m^4} \tag{4.180}$$

[§](訳註) 既に推察できるように，一般に２つの粒子を衝突させることで N 個の粒子が生成する過程の断面積要素 (同種粒子の非識別性因子はここでは考慮しない) は，

$$d\sigma = \frac{[\text{遷移頻度}]}{[\text{入射流束密度}]} \times [\text{終状態の状態数要素}] = \frac{|S_{fi}|^2/T}{v_{\rm rel}/V} \times \prod_{n=1}^{N} \frac{V d^3p_n}{(2\pi)^3}$$

と表される．$|S_{fi}|^2$ の規格化体積 V への依存性を考えると，生成粒子 N 個の波動関数規格化因子の自乗 $1/V^N$，入射粒子２個の波動関数規格化因子の自乗 $1/V^2$，デルタ関数の自乗に起因する因子 V (式(4.127)参照) が含まれる．生成粒子起因のものは，生成粒子の個数 N によらず３次元 p_n 空間積分の状態密度因子と各々すべて相殺し，残りの $V/V^2 = 1/V$ は入射流束密度の逆数に含まれる V と相殺するので，最終的には必ず V を含まない式が得られる．このような事情が理解できれば，一貫してすべての V を省くという前提で，式(4.177) のように V を含まない式だけを用いてもよい．崩壊型反応の頻度の計算でも類似の事情があって，やはり V は残らない (式(4.125)-(4.127))．

[†](訳註) ビームを同一直線上で対向させているので $\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_- = -|\mathbf{p}_+||\mathbf{p}_-|$ である．

式(4.128)-(4.129) の議論と式(4.180) により，式(4.177) も Lorentz 不変量であることが分かる．これは全断面積が採用する座標系に依存してはならないことを考えれば理に適っている．式(4.178) と，式(4.133) に相当するエネルギー保存因子の式を適用すると，重心系における微分断面積を導くことができる‡.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rm CM} = \frac{1}{8}\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{E_{\rm tot}}\frac{1}{|\mathbf{p}|}|\mathcal{M}_{fi}|^2(2m)^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{E_{\rm tot}^2}\frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{p}|}|\mathcal{M}_{fi}|^2(2m)^2 \tag{4.181}$$

上式は $1+2 \to 3+4$ のような任意の反応を対象とした次の一般式の特例にあたる．

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rm CM} = \frac{1}{4}\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{E_{\rm tot}^2}\frac{|\mathbf{p}_{\rm final}|}{|\mathbf{p}_{\rm initial}|}|\mathcal{M}_{fi}|^2 \prod_{\substack{\rm external\\ \rm fermion}}(2m_{\rm fermi}) \tag{4.182}$$

我々は実験室系における一方の光子の放射 (これを光子 1 と呼ぶ) に関する微分断面積に関心がある．通例に従い，運動量保存を表す 3 次元デルタ関数を利用して，k_2 に関する積分を即座に行うことができる．$\delta(E_+ + E_- - \omega_1 - \omega_2)d^3k_1$ の評価にあたって知る必要があるのは，θ_1 と ϕ_1 を固定したときのデルタ関数の引数部分の偏微分 $\partial E_f/\partial|\mathbf{k}_1| = \partial(\omega_1+\omega_2)/\partial|\mathbf{k}_1|$ である．運動学的な関係，

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_+ - \mathbf{k}_1| &= \sqrt{|\mathbf{p}_+|^2 - 2|\mathbf{p}_+|\omega_1\cos\theta_1 + \omega_1^2} = |\mathbf{k}_2| = \omega_2 \\ m + E_+ &= \omega_1 + \omega_2 \end{aligned} \tag{4.183}$$

を利用して，上述の偏微分は次のように与えられる．

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial E_f}{\partial|\mathbf{k}_1|}\right)_{\theta_1,\phi_1} &= \frac{\partial(\omega_1 + |\mathbf{p}_+ - \mathbf{k}_1|)}{\partial|\mathbf{k}_1|} \\ &= 1 + \frac{|\mathbf{k}_1| - |\mathbf{p}_+|\cos\theta_1}{\omega_2} = \frac{m(m+E_+)}{\omega_1\omega_2} \end{aligned} \tag{4.184}$$

したがって，実験室系における微分断面積は次のようになる．

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rm Lab} &= \frac{1}{4m|\mathbf{p}_+|}(2m)^2\frac{|\mathbf{k}_1|^2}{2\omega_1(2\pi)^3}\frac{2\pi}{2\omega_2}\frac{1}{\left(\partial E_f/\partial|\mathbf{k}_1|\right)_{\theta_1\phi_1}}|\mathcal{M}_{fi}|^2 \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{m^2|\mathbf{p}_+|}\frac{\omega_1^2}{m+E_+}|\mathcal{M}_{fi}|^2(2m)^2 \end{aligned} \tag{4.185}$$

この特別な場合に関しては，実験室系を採用して $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ の評価をするのが最も簡単である．まず，

‡(訳註) 波数空間積分におけるエネルギー保存因子は $d|\mathbf{k}|\delta(2\omega - E_{\rm tot}) \to 1/2$．この例では入射ビームの運動量の大きさ $|\mathbf{p}|$ を設定してしまえば生成光子の運動量の大きさ $|\mathbf{k}|$ が一意的に決まるので，断面積の式(4.181) において $|\mathbf{k}|$ を用いる必要はないのだが，一般式(4.182) との比較のために，$E_{\rm tot} = 2\omega = 2|\mathbf{k}|$ の関係を用いて敢えて $|\mathbf{k}|$ を導入してみせている．

$$p_- = (0, 0, 0, im), \qquad \epsilon^{(\alpha)} = (\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha)}, 0) \tag{4.186}$$

と置くことができる．これは $\gamma{\cdot}p_-$ が $\gamma{\cdot}\epsilon^{(\alpha)}$ と反交換することを意味するので，

$$(-i\gamma{\cdot}p_-)(\gamma{\cdot}\epsilon^{(\alpha)})u^{(s)}(\mathbf{p}_-) = -(\gamma{\cdot}\epsilon^{(\alpha)})mu^{(s)}(\mathbf{p}_-) \tag{4.187}$$

となる．$\epsilon^{(\alpha)}$ は $\epsilon^{(\alpha_1)}$ でも $\epsilon^{(\alpha_2)}$ でもよい．さらに，

$$\begin{aligned}(p_- - k_{1,2})^2 &= -m^2 - 2p_-{\cdot}k_{1,2}\\ &= -m^2 + 2m\omega_{1,2}\end{aligned} \tag{4.188}$$

なので，式(4.166) により，共変行列要素は次のように与えられる．

$$\mathcal{M}_{fi} = ie^2\bar{v}(\mathbf{0})\left[\frac{\gamma{\cdot}\epsilon^{(\alpha_1)}\gamma{\cdot}k_2\gamma{\cdot}\epsilon^{(\alpha_2)}}{2m\omega_2} + \frac{\gamma{\cdot}\epsilon^{(\alpha_2)}\gamma{\cdot}k_1\gamma{\cdot}\epsilon^{(\alpha_1)}}{2m\omega_1}\right]u(\mathbf{p}_-) \tag{4.189}$$

始状態の電子と陽電子が非偏極であれば，次の量を評価する必要がある．

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\sum_{s_+,s_-}|\mathcal{M}_{fi}|^2 &= \frac{e^4}{4}\sum_{s_+,s_-}\left(u^{(s_-)\dagger}O^\dagger\bar{v}^{(s_+)\dagger}\right)\left(\bar{v}^{(s_+)}Ou^{(s_-)}\right)\\ &= \frac{e^4}{4}\sum_{s_+,s_-}\bar{u}^{(s_-)}\gamma_4O^\dagger\gamma_4v^{(s_+)}\bar{v}^{(s_+)}Ou^{(s_-)}\\ &= \frac{e^4}{4}\mathrm{Tr}\left[\gamma_4O^\dagger\gamma_4\left(-\frac{i\gamma{\cdot}p_+ + m}{2m}\right)O\left(\frac{-i\gamma{\cdot}p_- + m}{2m}\right)\right]\end{aligned} \tag{4.190}$$

上式で用いた O は式(4.189) の括弧内の部分を表す．係数 $\frac{1}{4}$ は e^-e^+系の4つのスピン状態に関する平均を取るための因子である．$\gamma_4O^\dagger\gamma_4$ を評価するにあたり，空間成分が実数，第4成分が純虚数の任意の4元ベクトル a_μ に関して常に成立する次の公式が重要である．

$$\gamma_4(\gamma{\cdot}a)^\dagger\gamma_4 = \gamma_4\left[\boldsymbol{\gamma}{\cdot}\mathbf{a} + \gamma_4(ia_0)^*\right]\gamma_4 = -\gamma{\cdot}a \tag{4.191}$$

上式を更に一般化することもできる．

$$\gamma_4\left[(\gamma{\cdot}a)(\gamma{\cdot}b)(\gamma{\cdot}c)\cdots(\gamma{\cdot}l)\right]^\dagger\gamma_4 = (-\gamma{\cdot}l)\cdots(-\gamma{\cdot}c)(-\gamma{\cdot}b)(-\gamma{\cdot}a) \tag{4.192}$$

式(4.189)-(4.190) より，図4.6(a) (p.275) の過程の部分に関する振幅の絶対値自乗に起因する対角和(トレース)計算としては，次式を評価しなければならない．

$$\mathrm{Tr}\left[(\gamma{\cdot}\epsilon^{(\alpha_2)}\gamma{\cdot}k_2\gamma{\cdot}\epsilon^{(\alpha_1)})(i\gamma{\cdot}p_+ + m)(\gamma{\cdot}\epsilon^{(\alpha_1)}\gamma{\cdot}k_2\gamma{\cdot}\epsilon^{(\alpha_2)})(-\gamma{\cdot}p_- + m)\right] \tag{4.193}$$

上式において，まず m に関する1次の項は，奇数個のガンマ関数の積の対角和（トレース）がゼロになるという規則 (式(4.83)) によりゼロになる．m^2 の項もゼロになるが，これは，

$$\gamma{\cdot}k_2\,\gamma{\cdot}\epsilon^{(\alpha_1)}\,\gamma{\cdot}\epsilon^{(\alpha_1)}\,\gamma{\cdot}k_2 = k_2^2 = 0 \tag{4.194}$$

となるからである．上式の証明には，

$$(\gamma{\cdot}a)(\gamma{\cdot}a) = a^2 \tag{4.195}$$

を用いたが，これは式(4.81) の特例にあたる．残りの項を評価するには，ガンマ行列を“消す”ために式(4.195) を利用できることを念頭に置く．種々の項を式(4.81) を用いて書き直してゆき，式(4.195) を適用できる形に持ち込めばよい．$\epsilon^{(\alpha_{1,2})}{\cdot}p_- = 0$ や $k_{1,2}^2 = 0$，公式(4.80) なども利用して，次のように計算を行う．

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\left[\gamma{\cdot}\epsilon^{(\alpha_2)}\gamma{\cdot}k_2\,\gamma{\cdot}\epsilon^{(\alpha_1)}\gamma{\cdot}p_+\,\gamma{\cdot}\epsilon^{(\alpha_1)}\gamma{\cdot}k_2\,\gamma{\cdot}\epsilon^{(\alpha_2)}\gamma{\cdot}p_-\right]\\
&= \mathrm{Tr}\left[\gamma{\cdot}k_2(2\epsilon^{(\alpha_1)}{\cdot}p_+ - \gamma{\cdot}p_+\gamma{\cdot}\epsilon^{(\alpha_1)})\gamma{\cdot}\epsilon^{(\alpha_1)}\gamma{\cdot}k_2(2\epsilon^{(\alpha_2)}{\cdot}p_- - \gamma{\cdot}p_-\gamma{\cdot}\epsilon^{(\alpha_2)})\gamma{\cdot}\epsilon^{(\alpha_2)}\right]\\
&= -2\epsilon^{(\alpha_1)}{\cdot}p_+\,\mathrm{Tr}\left[\gamma{\cdot}k_2\,\gamma{\cdot}\epsilon^{(\alpha_1)}\gamma{\cdot}k_2\,\gamma{\cdot}p_-\right] + \mathrm{Tr}\left[\gamma{\cdot}k_2\,\gamma{\cdot}p_+\,\gamma{\cdot}k_2\,\gamma{\cdot}p_-\right]\\
&= -2\epsilon^{(\alpha_1)}{\cdot}p_+\,\mathrm{Tr}\left[\gamma{\cdot}k_2(2\epsilon^{(\alpha_1)}{\cdot}k_2 - \gamma{\cdot}k_2\,\gamma{\cdot}\epsilon^{(\alpha_1)})\gamma{\cdot}p_-\right]\\
&\quad + \mathrm{Tr}\left[\gamma{\cdot}k_2(2p_+{\cdot}k_2 - \gamma{\cdot}k_2\,\gamma{\cdot}p_+)\gamma{\cdot}p_-\right]\\
&= -16(\epsilon^{(\alpha_1)}{\cdot}p_+)(\epsilon^{(\alpha_1)}{\cdot}k_2)(k_2{\cdot}p_-) + 8(k_2{\cdot}p_+)(k_2{\cdot}p_-)\\
&= -16(\epsilon^{(\alpha_1)}{\cdot}k_2)^2(k_2{\cdot}p_-) + 8(k_1{\cdot}p_-)(k_2{\cdot}p_-)\\
&= 16m\omega_2(\epsilon^{(\alpha_1)}{\cdot}k_2)^2 + 8m^2\omega_1\omega_2
\end{aligned} \tag{4.196}$$

最後から2行めの式を得るために，光子の横波条件 ($\epsilon^{(\alpha_1)}{\cdot}\mathbf{k}_1 = 0$) による $\epsilon^{(\alpha_1)}{\cdot}p_+ = \epsilon^{(\alpha_1)}{\cdot}k_2$，およびエネルギー-運動量保存に基づく $k_2{\cdot}p_+ = k_1{\cdot}p_-$ という関係[§]を用い

[§](訳註) 運動量-エネルギー4元ベクトルの保存条件を変形した $k_1 - p_- = -(k_2 - p_+)$ において，両辺それぞれを自身とのスカラー積にして展開し，$k_{1,2}^2 = 0$ と $p_\pm^2 = -m^2$ を適用するとこの関係式が得られる．このあたりの計算に現れる k^2, p^2, a^2 などは，もちろん4元ベクトルの自身とのスカラー積を表し (p.8参照)，たとえば $k^2 = k\cdot k = |\mathbf{k}|^2 - \omega^2$ である．多数のガンマ行列を扱うこの辺の計算は“Feynmanスラッシュ”(p.115) を用いた方が見やすいかもしれない．式(4.196) の1行目は $\mathrm{Tr}[\not{\epsilon}^{(\alpha_2)}\not{k}_2\not{\epsilon}^{(\alpha_1)}\not{p}_+\not{\epsilon}^{(\alpha_1)}\not{k}_2\not{\epsilon}^{(\alpha_2)}\not{p}_-]$ と表される．公式 $\not{a}\not{b} = 2a\cdot b - \not{b}\not{a}$ (式(4.81))，$\not{a}\not{a} = a^2$ (式(4.195))，$\mathrm{Tr}[\not{a}\not{b}] = 4a\cdot b$ (式(4.80))，$\mathrm{Tr}[\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}] = 4[(a{\cdot}b)(c{\cdot}d) - (a{\cdot}c)(b{\cdot}d) + (a{\cdot}d)(b{\cdot}c)]$ (式(4.340)) や $(\epsilon^{(\alpha_{1,2})})^2 = 1$，$k_{1,2}^2 = 0$，$p_\pm^2 = -m^2$，運動学的関係 $\not{p}_+ + \not{p}_- = \not{k}_1 + \not{k}_2$ を利用してスラッシュを含まない式に変形してゆく．(スラッシュ因子が4つより多い場合，たとえば同じ $\not{\epsilon}$ 同士を隣接させるように変形すれば $\not{\epsilon}\not{\epsilon} = \epsilon{\cdot}\epsilon = 1$ となってスラッシュを減らせる．同様に $\not{k}\not{k} = 0$, $\not{p}\not{p} = -m^2$. 同じスラッシュ因子が顕わに含まれない場合には $\not{p}_+ + \not{p}_- = \not{k}_1 + \not{k}_2$ を利用する．) さらに，$\epsilon^{(\alpha_{1,2})}{\cdot}p_+ = \epsilon^{(\alpha_{1,2})}{\cdot}k_{2,1}$，$k_{1,2}\cdot p_+ = k_{2,1}\cdot p_- = -m\omega_{2,1}$，$p_-{\cdot}p_+ = -m(\omega_1 + \omega_2 - m)$，$k_1{\cdot}k_2 = -m(\omega_1 + \omega_2)$ などによって $p_\pm$ を含まず $\omega_{1,2}$ を優先的に用いた式を導く．この技法を念頭に置いて改めて前節の Mott断面積の導出を見直してみると，実質的には $\mathrm{Tr}[\not{\epsilon}(-i\not{p}' + m)\not{\epsilon}(-i\not{p} + m)]$ と同じような計算を行っていることが分かる ($\epsilon = (\mathbf{0}, iA_0)$ と考えて式(4.78) を参照)．

表4.1 式(4.200)における因子 $1-(\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)}\cdot\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_2)})^2$ の値.

	$\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_2)}$が$x$軸に平行	$\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_2)}$が$y$軸に平行
$\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)}$が$x$軸に平行	0	1
$\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)}$が$y$軸に平行	1	0

た．図4.6 (p.275) の (a) と (b) の過程の干渉から生じる対角和(トレース)も，同様に種々の技法を用いて計算できる．図4.6(b) の振幅の絶対値自乗から生じる対角和は，式(4.196)において光子の添字を入れ換えれば即座に得られる．これらを合わせた正味の結果は，

$$\frac{1}{4}\sum_{s_+,s_-}|\mathcal{M}_{fi}|^2=\frac{e^4}{2(2m)^2}\left[\frac{\omega_2}{\omega_1}+\frac{\omega_1}{\omega_2}+2-4\left(\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)}\cdot\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_2)}\right)^2\right] \tag{4.197}$$

となり，2光子放射型e^-e^+対消滅の微分断面積の式は，次のように求まる．

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{Lab}}=\frac{\omega_1^2 r_0^2}{8|\mathbf{p}_+|(m+E_+)}\left[\frac{\omega_2}{\omega_1}+\frac{\omega_1}{\omega_2}+2-4\left(\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)}\cdot\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_2)}\right)^2\right] \tag{4.198}$$

この断面積の式は，1930年に P. A. M. Dirac によって与えられた．

式(4.198) において低エネルギー極限を考え，次のように設定してみる．

$$\omega=\omega_1=\omega_2,\qquad \mathbf{k}=\mathbf{k}_1=-\mathbf{k}_2,\qquad |\mathbf{p}_+|=\beta_+ m \tag{4.199}$$

(この条件は入射陽電子の速度が非常に遅い場合に妥当する．) そうすると，

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{Lab}}=\frac{r_0^2}{4\beta_+}\left[1-\left(\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)}\cdot\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_2)}\right)^2\right] \tag{4.200}$$

となる．光子の偏極を観測しないならば，実験結果を光子の偏極状態について和を取った量と比較する必要がある．光子が生成する $\mathbf{k}=\mathbf{k}_1$ の向きに z 軸を選んで，偏極方向の基本ベクトルを x 軸方向と y 軸方向に設定する．このようにすると因子 $1-\left(\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)}\cdot\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_2)}\right)^2$ の値を表4.1 のようにまとめることができ，ここから偏極に関する総和は，単に因子2を生じることが分かる．全断面積を得るには，終状態において識別不可能な2つの光子が含まれることに注意が必要である．したがって，

$$\sigma^{\mathrm{tot}}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)d\Omega \tag{4.201}$$

であり，スピンを平均した全断面積は，次式で表される．

$$\sigma^{\mathrm{tot}}=\frac{r_0^2}{4\beta_+}2\times 2\pi=\frac{\pi r_0^2}{\beta_+},\qquad (\beta_+\ll 1) \tag{4.202}$$

この全断面積は，入射陽電子の速度に反比例する．これは発熱反応の特徴である．$\beta_+ \to 0$ において断面積は無限大になるが，単位時間あたりに消滅が起こる回数は有限を保つ．陽電子ビームの流束密度は β_+ に比例しており，ビームが遅くなる効果と断面積の増大効果が相殺するからである．

式(4.200) と表4.1 に戻って，$\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}$ と $\boldsymbol{\epsilon}^{(2)}$ が平行のときに遷移確率がゼロになっていることに注意しよう．この単純な結果には，単純な説明を与えることができるはずである．このことと，その他にも興味深いこの過程の特徴を見てみるために，低エネルギー対消滅の問題を自由粒子スピノルの具体的な式を用いて扱ってみよう．陽電子の速度をゼロにしたときの $\mathcal{M}$ 行列要素は，次のように表される．

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{ie^2}{2m\omega}\bar{v}^{(s+)}(\mathbf{0})\left[\gamma\cdot\epsilon^{(\alpha_1)}\gamma\cdot k_2\,\gamma\cdot\epsilon^{(\alpha_2)} + \gamma\cdot\epsilon^{(\alpha_2)}\gamma\cdot k_1\,\gamma\cdot\epsilon^{(\alpha_1)}\right]u^{(s-)}(\mathbf{0}) \tag{4.203}$$

光子の偏極ベクトルは時間成分を持たず，$\gamma_i\gamma_4\gamma_j$ は $u^{(s-)}(\mathbf{0})$ と $\bar{v}^{(s+)}(\mathbf{0})$ で挟むとゼロになるので†，$\gamma\cdot\epsilon^{(\alpha_1)}\gamma\cdot k_2\,\gamma\cdot\epsilon^{(\alpha_2)}$ を $\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)}\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{k}_2\,\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_2)}$ に置き換えることができる．第２項も同様に扱える．式(4.199) の近似に従うと，式(4.203) の括弧内の部分は次のようになる．

$$\begin{aligned}
&-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)}\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{k}\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_2)} + \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_2)}\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{k}\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)}\\
&\quad = -\left[i\boldsymbol{\Sigma}\cdot(\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)}\times\mathbf{k})\right]\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_2)} + \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_2)}\left[-i\boldsymbol{\Sigma}\cdot(\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)}\times\mathbf{k})\right]\\
&\quad = -2\mathbf{k}\cdot(\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)}\times\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_2)})\gamma_4\gamma_5
\end{aligned} \tag{4.204}$$

上式の導出には，

$$(\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{a})(\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + i\boldsymbol{\Sigma}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}), \qquad \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{a} = i\gamma_4\gamma_5\boldsymbol{\Sigma}\cdot\mathbf{a} \tag{4.205}$$

を用いた‡．まず相対運動量がゼロの e^-e^+ 系のスピン３重項 (triplet) 状態が，２光子放射型消滅を起こせないことを示す．回転不変性により，この命題を証明するには $J_3 = 1$ の状態，

$$(\uparrow)_{e^-}(\uparrow)_{e^+} = b^{(1)\dagger}(\mathbf{0})d^{(1)\dagger}(\mathbf{0})|0\rangle \tag{4.206}$$

を扱えば充分である．この状態に関係する自由粒子スピノルは $u^{(1)}(\mathbf{0})$ と $v^{(1)}(\mathbf{0})$ である．式 (4.204) に基づいて，次の量を評価する．

†(訳註) $\gamma_i\gamma_4\gamma_j = -\gamma_i\gamma_j\gamma_4 = -i\Sigma_k\gamma_4$ ((ijk)cyclic)．Σ_k も γ_4 も４成分スピノルの上側成分と下側成分を結合することはない (式(3.143), 式(3.32))．

‡(訳註) 式(4.204) の１行目には式(4.205) の第１式を適用する．２行目において $i\Sigma_i = \gamma_j\gamma_k$ ((ijk)cyclic) や $\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -\gamma_4\gamma_5$ を用いて γ_1, γ_2, γ_3 および $\gamma_5\gamma_4$ の項に整理すると，γ_1, γ_2, γ_3 の項については元の式の前の部分と後の部分から符号だけ互いに異なる項が生じて相殺し合い，$\gamma_5\gamma_4$ の項だけが残って３行目の式が得られる．

$$(\bar{v}\gamma_4\gamma_5 u)_{\mathrm{triplet},\,J_3=1} = v^{(1)\dagger}(\mathbf{0})\gamma_5 u^{(1)}(\mathbf{0})$$

$$= \big(0,0,0,-1\big)\begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{4.207}$$

他方，1重項 (singlet) 状態は，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\big[(\uparrow)_{e^-}(\downarrow)_{e^+} - (\downarrow)_{e^-}(\uparrow)_{e^+}\big] = \frac{1}{\sqrt{2}}\big[b^{(1)\dagger}(\mathbf{0})d^{(2)\dagger}(\mathbf{0}) - b^{(2)\dagger}(\mathbf{0})d^{(1)\dagger}(\mathbf{0})\big]|0\rangle \tag{4.208}$$

と表されるが，これに関しては次のようになる[23)].

$$(v^\dagger\gamma_5 u)_{\mathrm{singlet}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(0,0,1,0\big)\begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\big(0,0,0,-1\big)\begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \tag{4.209}$$

結果をまとめると，次のようになる[§].

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{fi}|^2_{\mathrm{triplet}} &= 0 \\ |\mathcal{M}_{fi}|^2_{\mathrm{singlet}} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2m\omega}\right)^2 e^4 \big|2\mathbf{k}\cdot(\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)}\times\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_2)})\big|^2 \\ &= \frac{2e^4}{m^2}\big[1-(\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)}\cdot\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_2)})^2\big] \end{aligned} \tag{4.210}$$

上の結果はもちろん，式(4.197) と整合している．何故なら，

$$\frac{1}{4}\sum_{s_+,s_-}|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{3}{4}|\mathcal{M}_{fi}|^2_{\mathrm{triplet}} + \frac{1}{4}|\mathcal{M}_{fi}|^2_{\mathrm{singlet}} \tag{4.211}$$

---

23) このような所において，陽電子スピノル v の定義に $v^{(1)}(\mathbf{p}) = -u^{(4)}(-\mathbf{p})$ のように負号を入れておくことの必要性と重要性を理解できる．

§(訳註) 一般に $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ は辺 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ を持つ平行四辺形の面積なので，$|\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)}\times\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_2)}| = |\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)}||\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_2)}|\sin\theta = \{1-(\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)}\cdot\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_2)})^2\}^{1/2}$ となる (θ は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ がなす角)．つまり式(4.210) は偏極が $\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)}$ と $\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_2)}$ の光子対を生成するような e^-e^+ 1重項の対消滅確率が $\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)}$ と $\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_2)}$ によって形成される四辺形の面積に比例することを意味しており，両者が互いに平行な2光子の生成を伴うような e^-e^+ 対消滅の確率はゼロになる．また，ここでは $\mathbf{k}\parallel(\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)}\times\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_2)})$ である．

という関係になっているからである．

対称性に関する考察　ここまでで我々は e^-e^+ 衝突の $\mathbf{p}_+ \to \mathbf{0}$ 極限において，(a) 3 重項状態が消滅して 2 光子を生成する過程は禁じられていること，(b) 1 重項状態については生成する 2 つの光子の偏極ベクトルが $\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_2)} \neq \pm 1$ となるような消滅が許容されることを示した．ここで，これらの特徴が一般的な対称性の考察に整合するものであり，摂動近似に従属するものではないことを見てみる．まず全運動量がゼロの可能な 2 光子状態を挙げてみよう．$\mathbf{k}\ (= \mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2)$ を z 軸の正の方向に選ぶと，$\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_1)}$ と $\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha_2)}$ は xy 平面に平行になる．まず光子 1 に関して，基本偏極ベクトル $\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}$ および $\boldsymbol{\epsilon}^{(2)}$ をそれぞれ x 軸および y 軸の正の方向に選ぶ．運動量が $-\mathbf{k}$ の光子 2 についても $\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}$ を x 軸の正の方向に取ることができるが，そうすると $\boldsymbol{\epsilon}^{(2)}$ は必然的に y 軸の“負の方向”としなければならない．すなわち z 軸の負の方向，x 軸の正の方向，y 軸の負の方向が，この順序で右手系を構成する必要がある (頭が混乱した読者は図4.8 を参照)．言い換えると，我々は慣例に従って $\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha)}$ の $\mathbf{k} \leftrightarrow -\mathbf{k}$ の変換を，

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}(\mathbf{k}) = \boldsymbol{\epsilon}^{(1)}(-\mathbf{k}), \qquad \boldsymbol{\epsilon}^{(2)}(\mathbf{k}) = -\boldsymbol{\epsilon}^{(2)}(-\mathbf{k}) \tag{4.212}$$

として，$\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha)}$ の運動量反転に関する変換係数を区別しておく．偏極ベクトルが互いに平行な 2 光子状態は，次の 2 つの状態の 1 次結合によって表される（添字の番号 1,2 は偏極状態)．

$$a^\dagger_{\mathbf{k},1} a^\dagger_{-\mathbf{k},1}|0\rangle, \qquad a^\dagger_{\mathbf{k},2} a^\dagger_{-\mathbf{k},2}|0\rangle \tag{4.213}$$

同様に，2 つの光子の偏極ベクトルが互いに直交する 2 光子状態は $a^\dagger_{\mathbf{k},1} a^\dagger_{-\mathbf{k},2}|0\rangle$ と

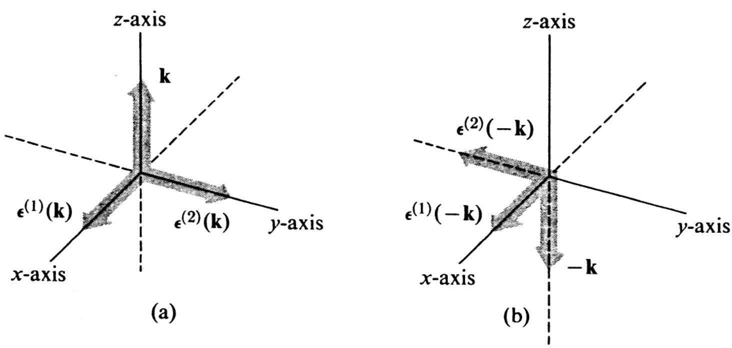


図4.8　光子の偏極ベクトルの選択．(a) 光子 1，(b) 光子 2．

$a^\dagger_{\mathbf{k},2}a^\dagger_{-\mathbf{k},1}|0\rangle$ によって構成される．しかしながら次に示すような，直交する1次結合の組合せを用いる方が便利である．

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a^\dagger_{\mathbf{k},1}a^\dagger_{-\mathbf{k},2}+a^\dagger_{\mathbf{k},2}a^\dagger_{-\mathbf{k},1}\right)|0\rangle \tag{4.214a}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a^\dagger_{\mathbf{k},1}a^\dagger_{-\mathbf{k},2}-a^\dagger_{\mathbf{k},2}a^\dagger_{-\mathbf{k},1}\right)|0\rangle \tag{4.214b}$$

$a^\dagger$ が可換であるという性質により，式(4.213)，式(4.214a) および式(4.214b) は自動的に Bose-Einstein 統計を満たす．

上で構築した2光子状態はパリティ変換における変換符号が確定している．まず横波の電磁場がパリティ変換の下で，

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\ \rightarrow\ -\mathbf{A}(-\mathbf{x},t) \tag{4.215}$$

のように変換することを思い出しておこう．式(4.212) で与えた $\boldsymbol{\epsilon}^{(1,2)}$ の変換因子の慣例を採用して，場の演算子の平面波展開(2.60) においてパリティ変換を考えると，個々の生成演算子と消滅演算子の変換性を次のように仮定すれば，式(4.125) の変換性が成立することが分かる．

$$a^\dagger_{\mathbf{k},\alpha}\rightleftharpoons(-1)^\alpha a^\dagger_{-\mathbf{k},\alpha},\quad a_{\mathbf{k},\alpha}\rightleftharpoons(-1)^\alpha a_{-\mathbf{k},\alpha}\quad(\alpha=1,2) \tag{4.216}$$

このことの直接の帰結は，式(4.213) や式(4.214b) はパリティが偶であるが，式(4.214a) はパリティが奇であるということである．他方 3.11節で示したように，$\mathbf{p}_+=\mathbf{p}_-=\mathbf{0}$ の e^-e^+系のパリティは，Dirac理論の要請から負 (奇) である．したがって e^-e^+ 消滅過程においてパリティが保存するならば，$\mathbf{p}_+=\mathbf{p}_-=\mathbf{0}$ の e^-e^+ 系から生じる2光子系は，式(4.214a) のように表される“互いに直交する偏極ベクトル (偏光) を持った2光子状態”でなければならない．このことは摂動論に基づいて得た結果と整合する．

次に荷電共役不変性からの帰結について考察してみよう．1光子状態や e^-e^+状態のような正味の電荷が中性の系は，3.10節と 3.11節で説明した荷電共役変換 C の固有状態であり得る．ただし電荷が中性のあらゆる系が C-固有状態だということではない．たとえば中性子と水素原子から成る系は C の固有状態ではない．この系に対して C変換を施すと，反中性子と“反水素原子”(陽電子が反陽子に束縛された系) になる．荷電共役変換に関する固有値は，荷電共役パリティもしくは C-パリティと呼ばれる．ここで荷電共役操作によって $b^{(s)\dagger}(\mathbf{p})$ と $d^{(s)\dagger}(\mathbf{p})$ が入れ替わることを思い出しておこう (式(3.404))．再び $\mathbf{p}_+=\mathbf{p}_-=\mathbf{0}$ の e^-e^+系を考えると，3重項状態(4.206) は次のように変換する．

$$b^{(1)\dagger}(\mathbf{0})d^{(1)\dagger}(\mathbf{0})|0\rangle \xrightarrow{\text{charge conj}} d^{(1)\dagger}(\mathbf{0})b^{(1)\dagger}(\mathbf{0})|0\rangle$$
$$= -b^{(1)\dagger}(\mathbf{0})d^{(1)\dagger}(\mathbf{0})|0\rangle \tag{4.217}$$

したがって３重項状態のC-パリティは奇である．同様にして１重項状態(4.208) のC-パリティが偶であることも確認できる．

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[b^{(1)\dagger}(\mathbf{0})d^{(2)\dagger}(\mathbf{0}) - b^{(2)\dagger}(\mathbf{0})d^{(1)\dagger}(\mathbf{0})\right]|0\rangle$$
$$\xrightarrow{\text{charge conj}} \frac{1}{\sqrt{2}}\left[b^{(1)\dagger}(\mathbf{0})d^{(2)\dagger}(\mathbf{0}) - b^{(2)\dagger}(\mathbf{0})d^{(1)\dagger}(\mathbf{0})\right]|0\rangle \tag{4.218}$$

(これらの結果を得るために $b^\dagger$ と $d^\dagger$ の間の反交換関係が決定的に重要な役割を果たすことに注意されたい．) 具体的な証明は省くが，この種の考察を ($\mathbf{p}_+ = \mathbf{p}_- = \mathbf{0}$ の制約を外して) 軌道角運動量が確定している e^-e^+ 系へと一般化できることに言及しておく．e^-e^+ 系のC-パリティは，相対的な軌道角運動量 l と全スピン S (３重項は $S = 1$，１重項は $S = 0$) を用いて $(-1)^{l+S}$ と与えられる．一方 j_μ は荷電共役変換によって符号が変わるので，電磁場 A_μ は荷電共役変換に関して奇であるが，相互作用密度 $-j_\mu A_\mu$ は不変でなければならない．$\mathbf{A}$ は $a^\dagger_{\mathbf{k},\alpha}$ と $a_{\mathbf{k},\alpha}$ を１次の形で含むので，これは横波電磁場の生成演算子と消滅演算子が荷電共役変換の下で符号を変えることを含意する．

$$a^\dagger_{\mathbf{k},\alpha} \xrightarrow{\text{charge conj}} -a^\dagger_{\mathbf{k},\alpha}, \quad a_{\mathbf{k},\alpha} \xrightarrow{\text{charge conj}} -a_{\mathbf{k},\alpha} \tag{4.219}$$

上の演算子の変換則からの直接の帰結として，偶数 (奇数) の光子を含む系は，荷電共役変換に関して偶 (奇) だということになる．

$$a^\dagger_{\mathbf{k}_1,\alpha_1}a^\dagger_{\mathbf{k}_2,\alpha_2}\cdots a^\dagger_{\mathbf{k}_n,\alpha_n}|0\rangle \xrightarrow{\text{charge conj}} (-1)^n a^\dagger_{\mathbf{k}_1,\alpha_1}a^\dagger_{\mathbf{k}_2,\alpha_2}\cdots a^\dagger_{\mathbf{k}_n,\alpha_n}|0\rangle \tag{4.220}$$

上の多光子系の変換則は，各光子の運動量や偏極方向にはよらずに成立する．$\mathbf{p}_+ = \mathbf{p}_- = \mathbf{0}$ の光子放射型 e^-e^+ 対消滅の問題に戻ると，相互作用が荷電共役変換の下で不変であれば，次の規則が成立する．

$$3\text{重項}\ (\mathbf{p}_- = \mathbf{p}_+ = \mathbf{0}) \not\longrightarrow \text{偶数光子系}$$
$$1\text{重項}\ (\mathbf{p}_- = \mathbf{p}_+ = \mathbf{0}) \not\longrightarrow \text{奇数光子系} \tag{4.221}$$

既に摂動論から得ている結果(4.210) は，もちろん上の規則に整合している．３光子放射型 e^-e^+ 対消滅に関して摂動論の計算を e^3 の次数まで行うと，$\mathbf{p}_+ = \mathbf{p}_- = \mathbf{0}$ の１重項状態は３光子を放射する消滅はできないが，３重項状態は３光子放射型の消滅

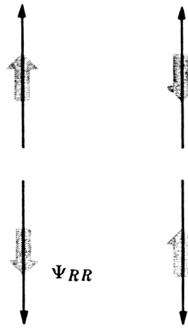


図4.9　２光子系の $J_3=0$ 状態．灰色の矢はスピンの向きを表す．

が可能である．L. Michel, L. Wolfenstein and D. Ravenhall はこれらの性質が式(4.221) の特例にあたり，摂動論の妥当性とは無関係に荷電共役不変性から厳密に成り立つものであることを示した．

角運動量保存から課される選択則を考察することも教育的である．この場合は２光子系 $(\mathbf{k}_1=-\mathbf{k}_2)$ の偏極状態を円偏光によって扱う方が考察しやすい．ひとつの光子の伝播方向に沿ったスピン成分は $+1$ か -1 であり，軌道角運動量は伝播方向に成分を持つことはできないので，$\mathbf{k}=\mathbf{k}_1=-\mathbf{k}_2$ の方向の全角運動量の成分 J_3 は 0 もしくは ±2 である．$J_3=0$ の状態を詳しく考察してみよう．図4.9 から明らかなように，２つの光子は両方とも右円偏光状態であるか，または両方とも左円偏光状態である．これらの２通りの状態ベクトルをそれぞれ Ψ_{RR} および Ψ_{LL} と表す．ここで x 軸のまわりの 180° 回転を考え，この回転操作を $\mathcal{R}_1(\pi)$ と表記する．電磁場の演算子の変換は次のように与えられる．

$$\begin{aligned} &A_1(x_1,x_2,x_3,t)\xrightarrow{\mathcal{R}_1(\pi)}A_1(x_1,-x_2,-x_3,t)\\ &A_{2,3}(x_1,x_2,x_3,t)\xrightarrow{\mathcal{R}_1(\pi)}-A_{2,3}(x_1,-x_2,-x_3,t) \end{aligned}\tag{4.222}$$

運動量が z 軸の正もしくは負の方向を向いた個別の光子生成演算子は，次のように変換しなければならない[24]．

$$a^\dagger_{\mathbf{k},1}\xleftrightarrow{\mathcal{R}_1(\pi)}a^\dagger_{-\mathbf{k},1},\quad a^\dagger_{\mathbf{k},2}\xleftrightarrow{\mathcal{R}_1(\pi)}a^\dagger_{-\mathbf{k},2},\tag{4.223}$$

[24] $a^\dagger_{\pm\mathbf{k},2}$ が $-a^\dagger_{\mp\mathbf{k},2}$ へと変換“しない”のは，我々が採用している偏極ベクトルのパリティ変換則 (式(4.212)) の下で，$a^\dagger_{\mathbf{k},2}|0\rangle$ の線形偏極ベクトルが y 軸の正の方向を，$a^\dagger_{-\mathbf{k},2}|0\rangle$ の線形偏極ベクトルが y 軸の“負の方向”を向くからである．

表4.2　電子-陽電子系 ($\mathbf{p}_+ = \mathbf{p}_- = 0$) の消滅における選択則.

	2光子放射型消滅 ($\epsilon^{(\alpha_1)} \parallel \epsilon^{(\alpha_2)}$)	2光子放射型消滅 ($\epsilon^{(\alpha_1)} \perp \epsilon^{(\alpha_2)}$)	3光子放射型消滅
3重項 ($C=-1, J=1$)	No by C and J	No by C and J	Yes
1重項 ($C=+1, J=0$)	No by P	Yes	No by C

"No by C (P, J)" は，荷電共役不変性 (パリティ不変性，角運動量保存則) による禁止を意味する.

上記の性質と $a^\dagger$ の交換関係を用いると，Ψ_{RR} は次のように変換する.

$$\Psi_{RR} = \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}\left(a^\dagger_{\mathbf{k},1} - ia^\dagger_{\mathbf{k},2}\right)\right]\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}\left(a^\dagger_{-\mathbf{k},1} - ia^\dagger_{-\mathbf{k},2}\right)\right]|0\rangle$$
$$\xrightarrow{\mathcal{R}_1(\pi)} \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}\left(a^\dagger_{\mathbf{k},1} - ia^\dagger_{\mathbf{k},2}\right)\right]\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}\left(a^\dagger_{-\mathbf{k},1} - ia^\dagger_{-\mathbf{k},2}\right)\right]|0\rangle \tag{4.224}$$

すなわち Ψ_{RR} は $\mathcal{R}_1(\pi)$ 変換の下で偶である．その上，よく知られている事実として任意の $J_3 = 0$ 系は固有回転の下で，球面調和関数 $Y_J^0(\theta, \phi)$ すなわち Legendre（ルジャンドル）多項式 $P_J(\cos\theta)$ のように変換する．$P_J(\cos\theta)$ の変換性は $\mathcal{R}_1(\pi)$ の下では単純である.

$$P_J(\cos\theta) \xrightarrow{\mathcal{R}_1(\pi)} P_J(-\cos\theta) = (-1)^J P_J(\cos\theta) \tag{4.225}$$

Ψ_{RR} は $\mathcal{R}_1(\pi)$ の下で偶でなければならないので，上式は $J_3 = 0$ の2光子状態 Ψ_{RR} の全角運動量の量子数 J が奇数 $1, 3, 5, 7, \ldots$ ではあり得ないことを示している．Ψ_{LL} についても同様である[25)]．$J = 1$ の系は $J_3 = \pm 2$ となり得ず，z 軸方向に相対運動量を持つ2光子系の全角運動量の成分は $J_3 = 0$ (Ψ_{RR} または Ψ_{LL}) か，$J_3 = 2$ (Ψ_{RL} または Ψ_{LR}) にしかならないので，次の規則が証明されたことになる.

$$J = 1\ 系 \not\longrightarrow 2\ 光子系 \tag{4.226}$$

このような広範に適用される選択則 (角運動量の保存のみに立脚する規則) が1950年に C. N. Yang によって導かれた[26)]．この一般的な結果から，$\mathbf{p}_- = \mathbf{p} = \mathbf{0}$ の e^-e^+ 3重項の消滅による2光子系の生成は，荷電共役不変性だけでなく，角運動量保存則の観点から見ても禁じられていることが分かる．表4.2 に各種の選択則の結果をまと

[25)] 実際には，2光子状態をパリティ固有状態としたいならば，$(1/\sqrt{2})(\Psi_{RR} \pm \Psi_{LL})$ を考えなければならない．しかしながら角運動量の選択則に関する議論において，パリティは無関係である.

[26)] この選択則は，中間子物理の歴史の初期において，中性 π 中間子についてスピン1の可能性を排除するために利用された.

めておく[27]．これらの選択則はもちろん，e^-e^+系と同様にC，P，Jという量子数を備えた他の系にも適用することが可能である．

2光子系に対する偏光測定の逆理　e^-e^+ 1重項状態の2光子放射型消滅について，更に詳しく見てみよう．パリティ保存の要請により，生成される2光子系の状態ベクトルは式(4.214a)のように表されることを既に示した．放射される光子の一方(光子1と呼ぶことにする．運動量$\mathbf{k}$)が持つ線形偏極(偏光)の方向を高感度で検出する測定器があるものとしよう．式(4.214a)は検出される光子の偏光方向がx軸方向とy軸方向に等しい確率を持つことを示している．$\mathbf{k}$の方向を軸とする回転対称性を乱す要因は存在していないので，これは全く当然のことである．次に，より洗練された実験系において2つの光子の偏光を“同時に”測定することを考える．観測者Aと観測者Bがそれぞれ光子1(運動量$\mathbf{k}$)および光子2(運動量$-\mathbf{k}$)の偏光を測定する．たとえば観測者Aが，あるe^-e^+消滅事象によって生じた光子1の偏光がx方向であることを見いだしたとしよう．そうすると式(4.214a)に従うならば，観測者Bは光子2の偏光がx方向の成分を持たないことを見いださなければならない．2つの光子が相互作用を終えてから長時間を経て，2つの光子が遠距離に隔たってからでも，このような偏光の測定を実施できることを考えると，上述の結果は驚くべきものである．2つの測定が空間的(スペースライク)に隔たった時空点において行われ，観測者Aが測定結果を観測者Bに伝える如何なる手段もない時点で観測者Bが測定を実施したとしても，両者の測定結果に上述のような相関が予想されてしまう．光子1の偏光の測定が行われなければ，光子2は偏光方向の確率に偏りを持たないはずなので，光子2は光子1に対する偏光の測定が行われたときに，瞬時にその測定の影響を受けて自身の偏光方向を“決めてしまう”ように見える．言い換えると，光子1に対する偏光の測定が行われる前には光子2の偏光方向は両方向の確率を等しく持っているにもかかわらず，光子1の偏光を測定した瞬間に，その結果から光子2の偏光方向を(光子2がどれだけ空間的に光子1から隔たっていても)確定的に言い当てることができるのである．

読者が上述のことに動揺を感じるとしても，それは全く自然なことである．20世紀の物理学における最も偉大な知性でさえも，この問題に頭を悩ませた．この量子論に内在する特異な性質は，文献的には“Einstein(アインシュタイン)-Podolsky(ポドルスキー)-Rosen(ローゼン)(EPR)の逆理(パラドックス)”として知られている．A. Einsteinは有名な自伝の中で，この問題について次のように書いている．

---

27) 表4.2に示した結果のいくつかは，場の量子論の言葉に頼らずに得ることができる(たとえばSakurai (1964), pp.15-16, p.45)．本書では主として場の演算子の変換性と状態ベクトルの変換性の関係を明示するために，一貫して場の量子論の言葉を用いてきた．

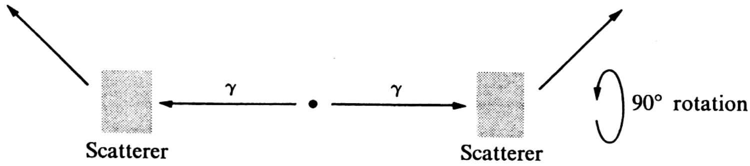


図4.10　2光子の偏極 (偏光) の測定.

> 私の見解では，理論において絶対に保持されなければならない仮定がある．すなわち系 S_2 の現実的な状況は，それと空間的に隔てられている系 S_1 において起こることに依存してはならない．

この逆理(パラドックス)を少し詳しく解析するために，この特別な問題において，何が量子力学系を構築しているのかを問い直してみよう．我々が光子1の偏光を測定するとき，測定の対象となる量子力学系は1光子状態 $a^{\dagger}_{\mathbf{k},\alpha}|0\rangle$ ではなくて，状態ベクトルが式(4.214a)で与えられる“複合的な”2光子系である†．量子力学における2光子系は，たとえその光子同士が互いに100万マイル離れていて相互作用をする可能性が無いとしても，これを2つの独立な1光子系のように見なすことは正しくない．いかなる一方の光子に対する測定も，2光子系全体に対する測定と見なされる．観測者 A が，光子1の偏光が x 方向であることを見いだしたならば，彼が実際に知ったことは2光子系が $a^{\dagger}_{\mathbf{k},1}a^{\dagger}_{-\mathbf{k},2}|0\rangle$ という状態であり，$a^{\dagger}_{\mathbf{k},2}a^{\dagger}_{-\mathbf{k},1}|0\rangle$ という状態ではないということである．その後に観測者 B が測定を行った結果は，最初の測定の結果である状態ベクトル $a^{\dagger}_{\mathbf{k},1}a^{\dagger}_{-\mathbf{k},2}|0\rangle$ によって表される状態に整合しなければならない．この観点からすると，観測者 B が必ず光子2の偏光を y 方向に見いだすことは，とりたてて特異なことではない．光子1に対する測定が，実際には“複合的な”2光子系が $a^{\dagger}_{\mathbf{k},1}a^{\dagger}_{-\mathbf{k},2}|0\rangle$ か $a^{\dagger}_{\mathbf{k},2}a^{\dagger}_{-\mathbf{k},1}|0\rangle$ かを決める測定であるという観点を我々が受け入れるならば，Einstein-Podolsky-Rosen の逆理は逆理ではなくなる．

2光子の偏光が式(4.214a)に従って相関を持つかどうかを検証する実験も行われていることに言及しておこう．J. A. Wheeler(ホイーラー)に従って，図4.10のような実験系を考えてみる．生成した2つの光子は，それぞれ別々の原子に属する電子によって散乱される．式(2.170)から明らかなように，Thomson(トムソン)散乱は光子の偏光方向の検出手段

†(訳註) 近年では“もつれた状態”(entangled state) という呼称が広く用いられている．2光子の偏極がそれぞれ確定していないけれども互いに相関を持つことが要点である．光子ではなくスピン1/2の同種粒子から成る2粒子系でも同様に，一方のスピンを観測によって確定するともう一方のスピンも確定するようなもつれた状態を想定することができる (Bohm-EPR実験).

となり得る．たとえば $\theta = 90°$ において，微分断面積は $\sin^2\phi$ のように分布する．ϕ は入射光子の偏光方向を基準とした方位角である．γ 線のエネルギーは電子の静止質量と同程度なので，ここでは Thomson の式ではなく Klein - Nishina の公式(3.344)に基づく分布を用いるべきであるが，$E_\gamma \simeq m$ であっても散乱後の偏光には明確な方向性が現れる．図4.10 のような配置の下で同時に両方の光子の検出頻度を測り，それから図4.10 の右側を $\mathbf{k}$ を軸として $90°$ 回転を施した配置の下でも両方の光子の検出頻度を測ってみれば，実際に式(4.214a) に従って偏光が互いに垂直になるような相関が実際に存在するかどうかを検証できる．C. S. Wu と I. Shaknov は反対方向に放射された γ 線において，式(4.214a) によって予言されるような相関が存在することを確認した．

ポジトロニウムの寿命　$\beta_+ \to 0$ の極限における全断面積の式(4.202) に戻って，この量と e^-e^+ 束縛系，すなわち“ポジトロニウム”(positronium) の寿命との単純な関係を示してみる．ポジトロニウムは M. Deutsch(ドイチュ) とその共同研究者たちが 1950年代の初めに行ったエレガントな一連の実験によって，その存在が認められるようになった．まず $\sigma_{\mathrm{tot}}v_+$ という量 (体積を時間で割った次元を持つ) が，単位体積に電子がひとつある場合の陽電子の平均寿命の逆数となることを思い出そう．したがって，

$$R = \sigma_{\mathrm{tot}}v_+\rho \tag{4.227}$$

は電子密度 ρ の下での陽電子の平均寿命の逆数にあたる．たとえば原子番号 Z の原子を単位体積あたり N 個含む媒質における陽電子の消滅を考えるならば，式(4.227) において ρ を NZ と置けばよい．“互いに束縛している”e^-e^+ 系の寿命を計算したいならば，電子密度 (陽電子の位置を基準に相対的に考える) を束縛状態の波動関数の絶対値の自乗を原点において評価すればよい．たとえばポジトロニウムの基底状態において，

$$\rho = |\psi_{1s}(\mathbf{x}=\mathbf{0})|^2 = \frac{1}{\pi(2a_0)^3} \tag{4.228}$$

となる．上式ではポジトロニウムの Bohr 半径が水素原子の2倍であることを用いた．この束縛系における電子 (陽電子) の速度は光速の 1/137 倍のオーダーなので，ポジトロニウムの寿命を評価するために，式(4.227) において $\lim_{\beta_+\to 0}\sigma_{\mathrm{tot}}$ を適用してよい．基底状態に関して次の結果が得られる．

$$\begin{aligned}\Gamma(n=1, {}^1S \to 2\gamma) &= \lim_{v_+\to 0} 4\sigma_{\mathrm{tot}}^{(\mathrm{unpol})}v_+|\psi_{1s}(\mathbf{x}=\mathbf{0})|^2 \\ &= 4\pi\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2\frac{1}{\pi(2/\alpha m)^3} = \frac{1}{2}\alpha^5 m\end{aligned} \tag{4.229}$$

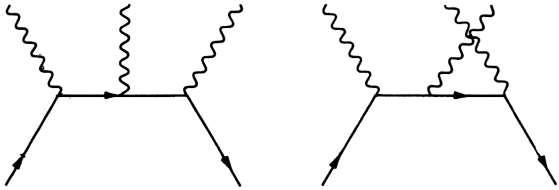


図4.11 3光子放射型 e⁻e⁺ 消滅を表す Feynman ダイヤグラム.

因子4は，1重項状態が式(4.211) において一部の寄与しか受け持っていないことに起因している．$n=1$ の ${}^1S$ 状態の平均寿命は，

$$\tau_{\text{singlet}} = \frac{2}{\alpha^5 m} \simeq 1.25\times 10^{-10}\,\text{sec} \tag{4.230}$$

となる．この結果は J. Pirenne が最初に算出したものである．${}^3S$ 状態は2光子放射型の消滅を禁じられており，図4.11 のダイヤグラムに対応して，もうひとつ e の次数が増える．このダイヤグラムの複雑な計算をしなくても，${}^3S$ 状態の寿命は $(1/\alpha)$ 倍ほど長いものと推測される．実際の結果は $n=1$ の s 波束縛状態について，次のようになる (A. Ore and J. L. Powell による).

$$\frac{\tau_{\text{triplet}}}{\tau_{\text{singlet}}} = \frac{9\pi}{4(\pi^2-9)\alpha} \simeq 1115 \tag{4.231}$$

Compton 散乱の断面積 本節の前の方で，2光子放射型 e^-e^+ 対(つい)消滅 (既に断面積を詳しく論じた) だけでなく，Compton 散乱の $\mathcal{M}$ 行列要素も既に得ている．2光子放射型 e^-e^+ 対消滅と Compton 散乱の $\mathcal{M}$ 行列要素 (式(4.166) および式(4.175)) は，次のような各因子の単純な置き換えによって関係づけられる．

$$\begin{aligned} &k_1, \epsilon^{(\alpha_1)} \to -k, \epsilon^{(\alpha)}, \quad k_2, \epsilon^{(\alpha_2)} \to k', \epsilon^{(\alpha')} \\ &p_- \to p, \quad p_+ \to -p' \end{aligned} \tag{4.232}$$

自由粒子スピノルに関しては $\bar{v}^{(s+)}(\mathbf{p}_+)$ が $\bar{u}^{(s')}(\mathbf{p}')$ に置き換わる ($u^{(s-)}(\mathbf{p}_-)$ も表記を $u^{(s)}(\mathbf{p})$ に変えておく)．こうすると式(4.232) の変更は $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ を対角和(トレース)の技法で計算する際に (負号を除き) 自動的に考慮される．これは，

$$-\frac{i\gamma\cdot p_+ + m}{2m} \to \frac{-i\gamma\cdot p' + m}{2m} \tag{4.233}$$

となるからである．図4.6 (p.275) と図4.7 (p.280) を比べると，この一連の変換により，図4.6における (入射) 陽電子を表す外線と (放射) 光子の一方の光子1を表す外線を，図4.7で放出電子を表す外線と入射光子を表す外線に置き換えていることが分かる．言い換えれば，必要とされる変更は，いくつかの外線を“曲げる”ことにすぎない．その上，Compton散乱の$\mathcal{M}$行列要素を実験室系において求めるならば，式(4.187)と式(4.188)と完全に類似した計算の簡略化が可能である．このような事情からCompton散乱の$\sum_{s,s'}|\mathcal{M}_{fi}|^2$は，2光子放射型$e^-e^+$対消滅の式(4.197)を既に得ていれば，すぐに書き下すことができる．式(4.233)による符号の変更以外で注意する必要があるのは，和の取り方の変更，

$$\frac{1}{4}\sum_{s_+s_-} \rightarrow \frac{1}{2}\sum_{ss'} \tag{4.234}$$

に伴う因子2の違いである．これはCompton散乱では始状態においてフェルミオンがひとつしかないので，そのスピン状態が2種類しかないことによる．式(4.197)に対応する式は，次のように与えられる．

$$\frac{1}{2}\sum_{s,s'}|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{e^4}{(2m)^2}\left[\frac{\omega}{\omega'}+\frac{\omega'}{\omega}-2+4\left(\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha)}\cdot\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha')}\right)^2\right] \tag{4.235}$$

実験室系において，電子に衝突する光子の相対速度は1 (自然単位系) である．波数空間 (運動量空間) におけるエネルギー保存因子には，次式を利用する．

$$\frac{\partial(E'+\omega')}{\partial(|\mathbf{k}'|)} = \frac{\omega'-\omega\cos\theta}{E'}+1 = \frac{m\omega}{E'\omega'} \tag{4.236}$$

上式を得ることは，次の運動学的な関係に注意すれば難しくない．

$$\begin{aligned} E' &= \sqrt{\omega^2+\omega'^2-2\omega\omega'\cos\theta+m^2} \\ \omega' &= \frac{m\omega}{m+\omega(1-\cos\theta)} \end{aligned} \tag{4.237}$$

θは実験室系における光子の散乱角である．必要な因子をまとめると，有名なKlein-Nishinaの公式(3.344)が得られる．入射する光子が偏光しておらず，散乱後の光子の偏光も観測しないのであれば，終状態の各偏光状態について和をとり，入射光子の偏光方向について平均化すればよい．この計算はThomson散乱 (2.5節) に関連して論じた技法によって行うことができる．正味の結果は次のように与えられる．

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega'}+\frac{\omega'}{\omega}-\sin^2\theta\right) \tag{4.238}$$

一般に ($\omega \ll m$ でなければ) ω' はωと等しくならず，式(4.237)を通じて散乱角θに依存するので，角度分布はThomson散乱とは異なり前方-後方対称ではなくなる．

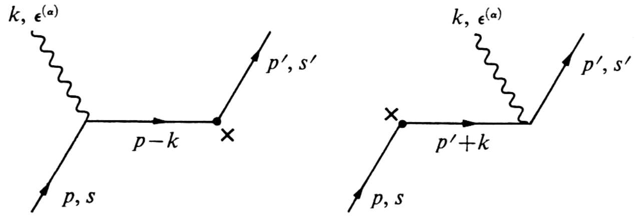


図4.12　制動放射.

式(4.238)は色々なエネルギー領域において検証されている．すでに1920年代の末にW. Friedrich and M. Goldhaberは$E_\gamma = 0.17m$ ($\lambda = 0.14$ Å)のγ線の散乱角度分布を観測し，実験値のThomsonの公式からのずれが正確に式(4.238)によって予想される量にあたることを示した．このとき確認された理論と実験の一致は，Dirac理論の最も早い時期における定量的な面での勝利のひとつに数えられる．

制動放射と対生成　本節を終えるにあたり，電子の伝播関数によって扱われる他の２種類の過程に簡単に言及する．すなわち制動放射 (bremsstrahlung) と，原子核Coulomb場における対(つい)生成である．ここではS行列展開に現れるA_μを２つの部分に分割すると都合がよい．

$$A_\mu = A_\mu^{(e)} + A_\mu^{(q)} \tag{4.239}$$

$A_\mu^{(e)}$はMott散乱との関係において考慮される単純なCoulombポテンシャル(4.56)であり，$A_\mu^{(q)}$は第２章で扱った量子化された横波の電磁場である．制動放射に関しては，図4.12のようにトポロジー的に等価でない２通りのグラフが考えられる．図中の×印はCoulombポテンシャルによる１次相互作用を表している．要点はCompton散乱において入射光子が消滅する部分の代わりに，Coulombポテンシャルによる１次相互作用が導入されていることである．Mott散乱の問題のように (電子-光子系を対象とする限りにおいて) 運動量は保存されない．原子核 (無限に重いと見なされる) が任意の運動量を授受できるからである．この理由からS行列を４次元デルタ関数と共変行列要素$\mathcal{M}$の積の形に書くことはできない．しかしS行列要素は簡単である．具体的な計算は読者に委ねることにするが (p.379, 問題4-10a)，結果は次のようになる．

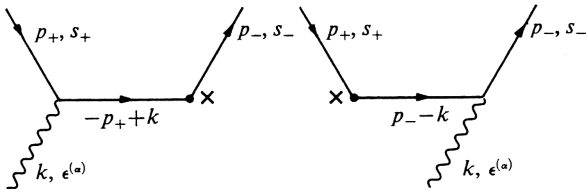


図4.13　原子核Coulomb場における対生成.

$$S_{fi} = -i2\pi Z e^3 \sqrt{\left(\frac{1}{2\omega V}\right)\left(\frac{m}{EV}\right)\left(\frac{m}{E'V}\right)}\,\delta(E'+\omega-E)\,\frac{1}{|\mathbf{p}'+\mathbf{k}-\mathbf{p}|^2}$$
$$\times \bar{u}^{(s')}(\mathbf{p}')\left[\gamma_4\frac{-i\gamma\cdot(p-k)+m}{i[(p-k)^2+m^2]}\gamma\cdot\epsilon^{(\alpha)} + \gamma\cdot\epsilon^{(\alpha)}\frac{-i\gamma\cdot(p'+k)+m}{i[(p'+k)^2+m^2]}\gamma_4\right]u^{(s)}(\mathbf{p}) \tag{4.240}$$

この制動放射の式が得られれば，式(4.232) と同様の置き換えの手続きによって，図4.13 に対応する対(つい)生成の行列要素を即座に求めることもできる．制動放射と対(つい)生成に関する断面積の式は 1934年に H. A. Bethe(ベーテ) and W. Heitler(ハイトラー)によって導出された．それらは実験との詳細な比較と併せて Heitler の本で紹介されている[28]．読者は問題4-10 (p.379) の (b) と (c) において，入射電子が非相対論的で，放射される光子のエネルギーが m に比べて小さい場合の制動放射の断面積を求めることになる．

実際の過程に関して，Compton 散乱の断面積には Z (原子内電子の数) を乗じる必要があるが，対(つい)生成の断面積は Z^2 に依存することに注意しよう．低エネルギーでは主として K殻電子が放出される光電効果の影響も重要となる．問題2.4 (p.90) によれば，水素様原子における光電効果の断面積は Bohr 半径の 5 乗に反比例するので，内殻電子による光電効果の断面積は Z^5 に比例する．エネルギー依存性については，光電効果は $\omega \ll m$ において $\omega^{-7/2}$ で減衰し (これも問題2-4 において $|\mathbf{k}_f|^2$ が ω に比例することに注意すれば分かることである)，$\omega \gg m$ では $1/\omega$ で減衰する．Compton断面積は $\omega \ll m$ のとき (ただし原子の束縛エネルギーに比べればまだ大きいエネルギー領域を想定する) には一定値を取り，ω が m を超えると急速に減衰する．すなわち式(4.238) に立体角積分を施すと，Compton 散乱の全断面積は次式で与えられる．

$$\sigma_{\text{Comp}} = \sigma_{\text{Thom}}\,\frac{3}{8}\,\frac{m}{\omega}\left(\log\frac{2\omega}{m}+\frac{1}{2}\right),\quad \omega \gg m \tag{4.241}$$

[28] Heitler (1954), pp.242-268.

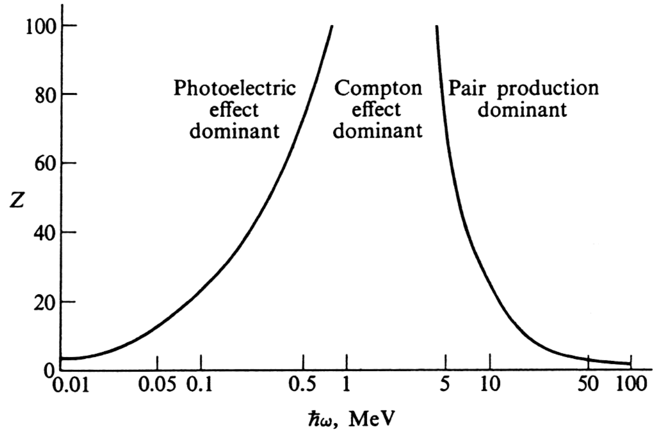


図4.14　光電効果, Compton散乱, 対生成の相対的な重要性.

したがって高エネルギーで対(つい)生成過程が最も重要となることは明らかである. 図4.14において, Z を指定したときに3種類の過程の何れが支配的になるかを定量的に示してある (R. D. Evans による *Encyclopedia* の解説より転載).

4.5　伝播関数に対するFeynmanの時空的アプローチ

ここまでの2つの節において, いくつかの簡単な過程を表す行列要素を, 第二量子化したDirac理論に基づいて計算する方法を示してきた. 本節では, すでに場の量子論の下で厳密に導いたこれらの結果と同じものが, Dirac粒子の波動方程式に基礎を置く R. P. Feynman(ファインマン)の"直観的な"方法によって, より簡単に得られることを示す. この別筋のアプローチを詳しく論じる理由は, これによって前の2つの節で導いた結果の本質的な部分に対して, 直観的な理解が可能となるからである.

Green関数　Feynman のアプローチは波動方程式に直接に立脚しているので, まず物理数学における非斉次微分方程式の解法を復習しておく. 簡単な例として, 静電気学において馴染みの深いPoisson(ポワソン)方程式を取り上げる.

$$\nabla^2\phi(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x}) \tag{4.242}$$

誰もが知っているように, $|\mathbf{x}| \to \infty$ において $\phi(\mathbf{x}) \to 0$ という境界条件を課したPoison方程式(4.242) の解は, 次の形で与えられる.

$$\phi(\mathbf{x}) = \int G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}')d^3x' \tag{4.243}$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \tag{4.244}$$

ここで導入した関数 $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ は，Poison方程式の“Green関数（グリーン）”と呼ばれ，次式を満たす.

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \tag{4.245}$$

言い換えれば，式(4.242) を直接解く代わりに，これを単純な点源問題(4.245) に還元して，まず後者を解いてもよい．後者が解ければ一般的な問題(4.242) に対する解も，重ね合わせの原理に基づいて即座に表すことができる.

相対論的な電子論においては，Dirac方程式を解くことが関心の対象となる.

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\psi = ie\gamma_\mu A_\mu \psi \tag{4.246}$$

ここでは (本節全体において) ψ は c-数の波動関数であって，量子化された電子場ではない[‡]．式(4.246) の右辺は式(4.242) における源の分布 $\rho(\mathbf{x})$ と似た意味を持つものに見える．静電気学と類似の観点から，式(4.246) を直接に解くことが難しいとしても，代わりに次のような点源問題から考えればよいという議論が可能である.

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)K(x, x') = -i\delta^{(4)}(x - x') \tag{4.247}$$

上式は，Dirac関数の成分添字を明示すると，次のように表される.

$$\left[(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right) + m\delta_{\alpha\beta}\right]K_{\beta\gamma}(x, x') = -i\delta^{(4)}(x - x')\delta_{\alpha\gamma} \tag{4.248}$$

$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ が Poison方程式の Green関数であることと同様に，$K(x, x')$ は自由粒子Dirac方程式の Green関数と見なされる．式(4.243) からのそのままの類推で，より複雑な微分方程式(4.246) の解が，次の形に表されるものと予想される.

$$\psi(x) = -\int K(x, x')e\gamma_\mu A_\mu(x')\psi(x')d^4x' \tag{4.249}$$

[‡](訳註) Feynman は“場の量子論を理解できなかったので”消滅・生成演算子を用いない独自の形式を創り上げたのだと言われることがある．一般にこの類の面白い流言をそのまま信用すべきではないが，この話は深い部分において一面の真実を含んでいると見てよいかも知れない．Feynman 自身，ノーベル賞受賞講演 (1965年) において，若い時分に消滅・生成演算子について習ったときに電荷保存則と矛盾するのではないかと訊き返したことや，実在的な電磁場の存在を想定しなければ電子の自己エネルギー発散の問題は解消するのではないかと考えたこと，さらには自身が電磁力学に対して創り上げた計算規則を中間子論にも応用しようとした際に，消滅・生成演算子を用いて書かれていた当時の論文の理論的な側面を，厳密には理解できなかったことなどを述懐している.

上の予想は，方程式への直接の代入によって，その正当性を確認できる．

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\left[-\int K(x,x')e\gamma_\mu A_\mu(x')\psi(x')d^4x'\right]$$
$$= \int i\delta^{(4)}(x-x')e\gamma_\mu A_\mu(x')\psi(x')d^4x'$$
$$= ie\gamma_\mu A_\mu \psi \tag{4.250}$$

ただし式(4.249) に任意の自由波の方程式 ($e = 0$) の解を加えても，微分方程式(4.246) は満たされることに注意してもらいたい．これを明示するために，一般解として次の形を考えよう．

$$\psi(x) = \psi_0(x) - \int K(x,x')e\gamma_\mu A_\mu(x')\psi(x')d^4x' \tag{4.251}$$

$\psi_0(x)$ は $e = 0$ と置いた Dirac方程式の解である．式(4.251) が方程式(4.246) を満たすことも容易に証明できる．たとえば $\psi_0(x)$ として，元々相互作用がなくても存在する入射平面波を想定する．

静電気学における微分方程式(4.242) と Dirac波動関数の微分方程式(4.246) には重要な違いがある．式(4.242) の右辺は ϕ を含まないので，即座に一般解を式(4.243) のように閉じた形で書くことができる．これに対して式(4.246) では関数 ψ そのものが右辺にも現れており，このことによって式(4.251) は積分方程式となっている．したがって，もし $K(x,x')$ の具体的な式を得たとしても (すぐに得られるが)，そこから即座に式 (4.246) の解を閉じた形で与えることはできない．しかしながら e の冪(べき)による摂動展開が正当化され得るならば，式(4.246) に対して常套的な逐次代入の方法によって e の任意の次数までの近似解を得ることができる．

$$\begin{aligned}\psi(x) = \psi_0(x) &+ \int d^4x' K(x,x')\left[-e\gamma_\mu A_\mu(x')\right]\psi_0(x') \\ &+ \int d^4x' \int d^4x'' K(x,x')\left[-e\gamma_\mu A_\mu(x')\right]K(x',x'')\left[-e\gamma_\nu A_\nu(x'')\right]\psi_0(x'') \\ &+ \int d^4x' \int d^4x'' \int d^4x''' K(x,x')\left[-e\gamma_\mu A_\mu(x')\right]K(x',x'')\left[-e\gamma_\nu A_\nu(x'')\right] \\ &\qquad \times K(x'',x''')\left[-e\gamma_\lambda A_\lambda(x''')\right]\psi_0(x''') + \cdots\end{aligned} \tag{4.252}$$

我々の次の作業は $K(x,x')$ の具体的な積分表示を得ることである．まず並進対称性 (空間および時間について) により，$K(x,x')$ が $x - x'$ だけの関数になることは自明である．したがって一般性を損なうことなく $x' = 0$ と置くことができる．式(1.36)

を3次元Fourier変換の方法で解いたのと同様に，式(4.247)を4次元Fourier変換の方法を利用して解いてみる．$\tilde{K}(p)$ を次式によって定義する．

$$K(x,0)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\tilde{K}(p)e^{ip\cdot x}d^4p \tag{4.253}$$

式(4.247)で $x'=0$ と置いた式に，上式を代入してみる．

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^4}\int(i\gamma{\cdot}p+m)\tilde{K}(p)e^{ip\cdot x}d^4p&=-i\delta^{(4)}(x)\\&=-\frac{i}{(2\pi)^4}\int e^{ip\cdot x}d^4p\end{aligned} \tag{4.254}$$

そうすると微分方程式(4.247)は，運動量空間における単純な代数方程式に還元される．

$$(i\gamma{\cdot}p+m)\tilde{K}(p)=-i \tag{4.255}$$

これを形式的に解くと，次のようになる．

$$\tilde{K}(p)=-\frac{i}{i\gamma{\cdot}p+m} \tag{4.256}$$

上式の $1/(i\gamma{\cdot}p+m)$ は，$(i\gamma{\cdot}p+m)$ を右側または左側から掛けると 4×4 単位行列が得られるような 4×4 行列を意味する．$(i\gamma{\cdot}p)^2=-p^2$ を利用して式(4.256)を次のように書き直すこともできる．

$$\tilde{K}(p)=-\frac{i(-i\gamma{\cdot}p+m)}{(i\gamma{\cdot}p+m)(-i\gamma{\cdot}p+m)}=\frac{-i\gamma{\cdot}p+m}{i(p^2+m^2)} \tag{4.257}$$

座標空間 (x 空間) に戻るならば，式(4.253)を用いて次式が与えられる．

$$K(x,0)=-\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{-i\gamma{\cdot}p+m}{p^2+m^2}e^{ip\cdot x} \tag{4.258}$$

一般的には，次のようになる．

$$K(x,x')=-\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{-i\gamma{\cdot}p+m}{p^2+m^2}e^{ip\cdot(x-x')} \tag{4.259}$$

式(4.259)の被積分関数は，すでに前節から見慣れているものである．p_0 に関する積分を，複素 p_0 面における実軸に沿った積分として考えると，$p_0=\pm E=\pm\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$ に極が存在する．

$$K(x,x')=-\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^3p\,e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\int_{-\infty}^{\infty}dp_0\,\frac{(-i\gamma{\cdot}p+m)e^{-ip_0(x_0-x_0')}}{(-p_0+E)(p_0+E)} \tag{4.260}$$

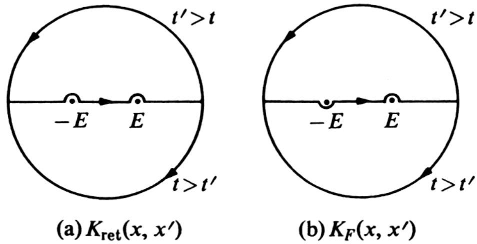


図4.15　式(4.260) の複素p_0面における積分路.

$K(x, x')$ が具体的にどのような関数に帰着するかは，複素p_0面において積分路が極を迂回する方法に依存して決まる．このような曖昧さが残ることは，物理的な観点からも予想される．すなわち我々は，方程式を解くために適用すべき境界条件を未だ特定していない．

$K_{\rm F}$ と $K_{\rm ret}$　2通りの異なる境界条件に対応する2種類の $K(x, x')$ を考えてみる．まず“遅延Green関数”(retarded Green's function) と呼ばれる，次の性質を持つ関数を考える．

$$K_{\rm ret}(x, x') \begin{cases} \neq 0 & t > t' \\ = 0 & t < t' \end{cases} \tag{4.261}$$

$K_{\rm ret}$ は複素p_0面において，図4.15(a) のような積分路を選んだ結果に対応している．$t > t'$ の場合，積分路の半円部分を下半面側に選んで閉路を形成する必要がある．したがって，“両方の極からの寄与を拾い上げる”ことになる．これに対して $t < t'$ の場合には“どちらの極からの寄与もなくなる”．

積分路を図4.15(b) のように変更してみよう．図4.5 (p.271) と式(4.159) を参照すると，この場合の $K(x, x')$ が前節において詳しく論じた $\langle 0|T(\psi(x), \bar{\psi}(x'))|0\rangle = -\frac{1}{2}S_{\rm F}(x - x')$ に一致することは明らかである．図4.15(b) のような積分路選択の手続きに従って得たGreen関数を $K_{\rm F}(x - x')$ と表記する．式の形で定義すると，

$$\begin{aligned} K_{\rm F}(x, x') &= -\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{(-i\gamma\cdot p + m)e^{ip\cdot(x-x')}}{p^2 + m^2 - i\epsilon} \\ &= \langle 0|T\big(\psi(x)\bar{\psi}(x')\big)|0\rangle \\ &= -\frac{1}{2}S_{\rm F}(x - x') \end{aligned} \tag{4.262}$$

である．前節において我々は $p_0 = +E$ の周囲を“時計まわりに”積分すれば式(4.154)が得られ，$p_0 = -E$ の周囲を“反時計まわりに”積分すれば式(4.157) が得られることを既に証明している．K_{ret} を $t > t'$ において計算する際には $+E$ と $-E$ の極の“両方”の周囲を“時計まわりに”積分しなければならない．したがって $K_{\text{ret}}(x, x')$ は次のように与えられる．

$$K_{\text{ret}}(x, x') = \begin{cases} \lim_{V\to\infty} \sum_{\mathbf{p},s} \frac{m}{EV} \left[u^{(s)}(\mathbf{p})\, \bar{u}^{(s)}(\mathbf{p})\, e^{ip\cdot(x-x')} \right. & \\ \qquad \left. + v^{(s)}(\mathbf{p})\, \bar{v}^{(s)}(\mathbf{p})\, e^{-ip\cdot(x-x')} \right] & \text{for } t > t' \\ 0 & \text{for } t' > t \end{cases} \tag{4.263}$$

これに対して K_{F} については前節と整合する結果が得られる．

$$K_{\text{F}}(x, x') = \lim_{V\to\infty} \sum_{\mathbf{p},s} \frac{m}{EV} \begin{cases} u^{(s)}(\mathbf{p})\, \bar{u}^{(s)}(\mathbf{p})\, e^{ip\cdot(x-x')} & \text{for } t > t' \\ -v^{(s)}(\mathbf{p})\, \bar{v}^{(s)}(\mathbf{p})\, e^{-ip\cdot(x-x')} & \text{for } t' > t \end{cases} \tag{4.264}$$

式(4.259) から式(4.262) までの積分変数としての p_0 は一般に $E = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ と等しくないことは前節と同様であるが，式(4.263) と式(4.264) の指数関数部分の $p = (\mathbf{p}, ip_0)$ に含まれる p_0 は E に等しいことを注意しておく．

重要な疑問は，摂動展開(4.252) において用いるべき Green関数は K_{ret} と K_{F} のどちらかということである．Schrödinger理論においては，適正な Green関数は $t' > t$ においてゼロになる．このことは t が t' より後の時刻ならば t' において作用するポテンシャルによって t における波動関数が影響を受け得るが，t が t' 以前であれば t' のポテンシャルから影響を受けないという観点から直観的に明らかである (この点については p.380 の問題4-11 を解くと更に明確に理解できる)．そこで読者は，あるいは相対論的な電子論においても K_{ret} を用いるのがよいと考えてしまうかも知れない．しかしながら K_{ret} を採用することは Dirac理論における空孔解釈に整合しないことを，これから示す．

1次の摂動論の妥当性を仮定して，外部ポテンシャルの問題を考えてみよう．摂動展開(4.252) における K として K_{ret} を採用すると，波動関数は式(4.263) を用いて次のように与えられる．

$$\psi(x) \simeq \psi_0(x) + \int d^4x' K_{\text{ret}}(x,x')\left[-e\gamma_\mu A_\mu^{(\text{e})}(x')\right]\psi_0(x')$$
$$= \psi_0(x) + \sum_{\mathbf{p}'}\sum_{s'=1}^{2} c_{\mathbf{p}',s'}^{(+)}(t)\left[\sqrt{\frac{m}{E'V}}u^{(s')}(\mathbf{p}')e^{ip'\cdot x}\right]$$
$$+ \sum_{\mathbf{p}'}\sum_{s'=1}^{2} c_{\mathbf{p}',s'}^{(-)}(t)\left[\sqrt{\frac{m}{E'V}}v^{(s')}(\mathbf{p}')e^{-ip'\cdot x}\right] \tag{4.265}$$

$$c_{\mathbf{p}',s'}^{(+)}(t) = -e\int d^3x'\int_{-\infty}^{t} dt'\sqrt{\frac{m}{E'V}}e^{-ip'\cdot x'}\bar{u}^{(s')}(\mathbf{p}')\gamma_\mu\psi_0(x')A_\mu^{(\text{e})}(x')$$
$$c_{\mathbf{p}',s'}^{(-)}(t) = -e\int d^3x'\int_{-\infty}^{t} dt'\sqrt{\frac{m}{E'V}}e^{ip'\cdot x'}\bar{v}^{(s')}(\mathbf{p}')\gamma_\mu\psi_0(x')A_\mu^{(\text{e})}(x') \tag{4.266}$$

議論の曖昧さを避けるために，$\psi_0(x)$ は $\mathbf{p}$ と s によって指定される規格化された正エネルギーの平面波であると仮定する．波動力学における通常の解釈に従って，$|c_{\mathbf{p}',s'}^{(+)}(t)|^2$ は，遠い過去の時刻に $(\mathbf{p}, s)$ に確定していた電子が，時刻 t において $(\mathbf{p}, s)$ とは異なる正エネルギーの $(\mathbf{p}', s')$ 状態に見出される確率と考える．実際 4.3節を見ると，$c_{\mathbf{p}',s'}^{(+)}(\infty)$ は始状態 $(\mathbf{p}, s)$ の電子が $(\mathbf{p}', s')$ へ遷移する 1 次の S 行列に正確に一致している (式(4.64))．正エネルギー電子は外部ポテンシャルの下で，別の正エネルギー状態に遷移することができるので，これは理に適っている．他方，上の $c_{\mathbf{p}',s'}^{(-)}(t)$ の挙動は理解し難い．$v^{(s)}(\mathbf{p})e^{-ip\cdot x}$ は次の関係に従い，負エネルギー波動関数と見なせることを思い出そう (式(3.384))．

$$v^{(1,2)}(\mathbf{p})e^{-ip\cdot x} = \mp u^{(4,3)}(-\mathbf{p})e^{i(-\mathbf{p})\cdot\mathbf{x}-i(-E)t} \tag{4.267}$$

(E は正とする．) 式(4.265)-(4.266) から，始状態では正エネルギーを持っていた電子が，遠い未来においても必ず有限の確率で負エネルギー状態に遷移し得ることが見て取れる (この種の特例としては p.222, 問題3-12 を参照)．このように K_{ret} を採用すると，外部ポテンシャルの下で空孔が永遠に存在を続け，正エネルギーの電子が負エネルギー状態へ遷移する確率を持ち続けるという，空孔理論に反する破滅的な結果を導いてしまうことになる．

次に摂動展開(4.252) において K_{F} を採用することを考えよう．式(4.264) を用いると，1 次摂動までの波動関数は次のように与えられる．

$$\psi(x) \simeq \psi_0(x) + \int d^4x' K_F(x,x')\left[-e\gamma_\mu A_\mu^{(e)}(x')\right]\psi_0(x')$$
$$= \psi_0(x) + \sum_{\mathbf{p}'}\sum_{s'=1}^{2} c_{\mathbf{p}',s'}^{(+)}(t)\left[\sqrt{\frac{m}{E'V}}u^{(s')}(\mathbf{p}')e^{ip'\cdot x}\right]$$
$$+ \sum_{\mathbf{p}'}\sum_{s'=1}^{2} c_{\mathbf{p}',s'}^{(-)}(t)\left[\sqrt{\frac{m}{E'V}}v^{(s')}(\mathbf{p}')e^{-ip'\cdot x}\right] \tag{4.268}$$

$$c_{\mathbf{p}',s'}^{(+)}(t) = -e\int d^3x'\int_{-\infty}^{t} dt' \sqrt{\frac{m}{E'V}}e^{-ip'\cdot x'}\bar{u}^{(s')}(\mathbf{p}')\gamma_\mu\psi_0(x')A_\mu^{(e)}(x')$$
$$c_{\mathbf{p}',s'}^{(-)}(t) = +e\int d^3x'\int_{t}^{\infty} dt' \sqrt{\frac{m}{E'V}}e^{ip'\cdot x'}\bar{v}^{(s')}(\mathbf{p}')\gamma_\mu\psi_0(x')A_\mu^{(e)}(x') \tag{4.269}$$

今度は t' の積分範囲が $c^{(+)}$ と $c^{(-)}$ とで違っていることに注意されたい．このため $t \to \infty$ においてすべて満足のいく結果が得られる．ここでも ψ_0 を $(\mathbf{p}, s)$ の平面波と置くと，$c_{\mathbf{p}',s'}^{(+)}(\infty)$ は式(4.266) の場合と同様に $(\mathbf{p}, s)$ から別の $(\mathbf{p}', s')$ へ遷移する過程の $S^{(1)}$ 行列要素に等しい．その一方で，式(4.266) の望ましからざる性質は，ここには現れない．すなわち K_F を採用するならば $c_{\mathbf{p}',s'}^{(-)}$ は $t \to \infty$ においてゼロになる．このことは，時間に依存する外部ポテンシャルが存在しても，正エネルギー電子が負エネルギー状態へ“仮想的”ではない“実の”遷移を起こせないことを意味している．したがって，負エネルギー状態への破滅的な遷移は禁じられる．

他方において，式(4.269) の $t \to -\infty$ における挙動はいささか解釈が難しい．$t \to -\infty$ において $c_{\mathbf{p}',s'}^{(+)}$ はゼロに近づくが，$c_{\mathbf{p}',s'}^{(-)}$ の方は一般にゼロにはならない．したがって $\psi(t=-\infty)$ は ψ_0 と等しく“ない”が，これは奇妙なことである．実際これから見るように，このことの物理的な意味を究極的に解釈するには，Dirac波動関数の意味に関する新たな仮定が必要となるのである．幸い 4.3節で得たいくつかの結果が $c_{\mathbf{p}',s'}^{(-)}(-\infty)$ の物理的な意味を理解する助けになる．ψ_0 を規格化された正エネルギーの平面波と置き，$(\mathbf{p}', s')$ を消滅する陽電子の運動量-スピン指標と読み替えるならば，$c_{\mathbf{p}',s'}^{(-)}(-\infty)$ は負号を除いて (符号は本質的に重要ではない[29]) 外場 $A_\mu^{(e)}$ の存在の下での $e^- + e^+ \to$ vacuum という過程に対する 1 次の S 行列要素(4.114) にほかならない．このことは我々が $c_{\mathbf{p}',s'}^{(-)}(t)\sqrt{m/EV}\,v^{(s')}(\mathbf{p}')e^{-ip'\cdot x}$ を，外場 $A_\mu^{(e)}$ が存在する際に入射電子が入ることのできる“空いた”負エネルギー状態 $(-\mathbf{p}', r' = 5 - s')$ の波動関数に同定することを促す．時間が経つにつれて，そのような状態は対消滅によって減り続け，$t \to \infty$ において $c_{\mathbf{p}',s'}^{(-)}$ は事実上“ゼロ”に到達する．あるいは，も

[29] $e^- + e^+ \to$ vacuum (4.3節) を論じる際に始状態として $b^\dagger d^\dagger|0\rangle$ の代わりに $d^\dagger b^\dagger|0\rangle$ を用いれば，S 行列要素(4.114) は符号が反転する．

うひとつの見方として $|c^{(-)}_{\mathbf{p}',s'}(t)|^2$ を状態$(\mathbf{p}', s')$ において“陽電子”を見いだす確率と捉えてもよい．これは $t=\infty$ までに確実に消失する．対生成のS行列要素を計算するためには，時間を $t=-\infty$ まで逆戻りして，やがて消滅することになる陽電子を見いだす振幅を調べればよい．t が遠い過去の場合に $c^{(-)}_{\mathbf{p}',s'}$ がゼロにならないという最初は奇妙に思えた性質は，外部ポテンシャルが電子を散乱するだけでなく，電子-陽電子対(つい)を消滅する作用も持つことを理解すれば，自然に受け入れることができる．

式(4.268) および式(4.269) における各項の物理的な意味を完全に把握するために，時空座標 x' を引数とする Dirac波動関数に対して作用する積分演算子，

$$\int d^3x' K_{\mathrm{F}}(x,x')\gamma_4 \tag{4.270}$$

の性質を調べてみることが教育的である．時間順序を，まずは“普通”に $t>t'$ と仮定する．演算子(4.270) を自由粒子の正エネルギー波動関数に作用させると，後の時刻 t において同じ運動量-スピン状態を持つ波動関数が得られる．

$$\begin{aligned}
&\int d^3x' K(x,x')\gamma_4\sqrt{\frac{m}{EV}}u^{(s)}(\mathbf{p})e^{ip\cdot x'}\\
&\quad=\sum_{\mathbf{p}'}\sum_{s'}\frac{m}{E'V}u^{(s')}(\mathbf{p}')u^{(s')\dagger}(\mathbf{p}')\sqrt{\frac{m}{EV}}u^{(s)}(\mathbf{p})e^{ip'\cdot x}\int_V d^3x' e^{-ip'\cdot x'+ip\cdot x'}\\
&\quad=\sqrt{\frac{m}{EV}}u^{(s)}(\mathbf{p})e^{ip\cdot x}
\end{aligned}\tag{4.271}$$

上式では自由粒子スピノルの直交性(3.106) を利用した．他方，積分演算子(4.270) を負エネルギー波動関数(4.267) に作用させると，$t>t'$ においてゼロになることは明らかである $(u^{(s')\dagger}(-\mathbf{p})v^{(s)}(\mathbf{p})=\pm u^{(s')\dagger}(-\mathbf{p})u^{(3\,\mathrm{or}\,4)}(-\mathbf{p})=0)$．時間順序が“反対”の $t'>t$ の場合には，演算子(4.270) を負エネルギー波動関数に作用させると，同じ負エネルギー状態を持つ“前の”時刻の波動関数が得られ，正エネルギー波動関数に作用させるとゼロになる．以上をまとめると，次のようになる．

$$\int d^3x' K_{\mathrm{F}}(x,x')\gamma_4\left\{\begin{matrix}\sqrt{\dfrac{m}{EV}}u^{(s)}(\mathbf{p})e^{ip\cdot x'}\\ \sqrt{\dfrac{m}{EV}}v^{(s)}(\mathbf{p})e^{-ip\cdot x'}\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}\sqrt{\dfrac{m}{EV}}u^{(s)}(\mathbf{p})e^{ip\cdot x}\theta(t-t')\\ -\sqrt{\dfrac{m}{EV}}v^{(s)}(\mathbf{p})e^{-ip\cdot x}\theta(t'-t)\end{matrix}\right. \tag{4.272}$$

言葉で表現すると，積分演算子(4.270) は，正エネルギー解を時間に順行させ，負エネルギー解を時間に溯行させる作用を持つ．

ここで式(4.268) の1行目に戻って考えてみると，まず $-e\gamma_\mu\psi_0(x')A^{(e)}_\mu(x')$ は入射電子が外部ポテンシャルと x' において相互作用することを表している．相互作用

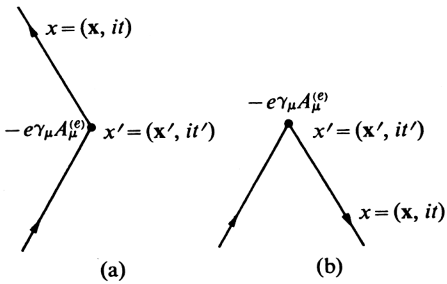


図4.16　式(4.268) のグラフによる解釈. (a) 通常の散乱 ($t > t'$), (b) 対消滅 ($t < t'$).

の結果として x' を起点とする正エネルギー波と負エネルギー波の両方が予想される. 未来の方を見ると Green関数 $K_F(x, x')$ は $t > t'$ において正エネルギー電子を時間に順行する方向に運ぶ. 過去の方を見ると Green関数 $K_F(x, x')$ は $t < t'$ において負エネルギー電子を時間に溯行する方向に運ぶ. しかし我々は既にそのような負エネルギー状態に関する確率振幅 $c_{\mathbf{p},s}^{(-)}$ が, 後の時刻に消滅することを宿命づけられた陽電子の確率振幅に相当することを論じた. したがって対消滅過程を, 通常の散乱過程 (図4.16(a)) と完全な類似性を持つ, 正エネルギー電子が時間を溯行する負エネルギー状態へ遷移する散乱過程として視覚化することができる (図4.16(b)). x' において消滅する陽電子は“時間に溯行する方向へ散乱された電子”と見なされる. この観点からすると, 時間を溯行する負エネルギー電子は, 時間に順行する陽電子と等価なものである. 前節において仮想的な電子 (陽電子) の伝播に基づいて提案したこの等価性は, 今や“実の”電子 (陽電子) においても意味を持つように見える.

ここまで電子の散乱と対消滅を詳しく見てきた. 式(4.268) における ψ_0 を負エネルギーの自由粒子波動関数と考えるならば, 外場の下での1次の陽電子散乱と対生成について, 全く同様の方法で論じることができる. 電子の散乱と対消滅に関しては, ψ_0 を正エネルギー波動関数と置き, K_F (K_{ret} ではなく) を採用することで, 遠い未来には ψ が $v^{(s)}e^{-ip\cdot x}$ のような成分を含まないという適正な境界条件が保証された. 陽電子の散乱と対生成の問題を考える際には, 遠い過去において ψ が $u^{(s)}e^{ip\cdot x}$ のような成分を持たないという条件を課さねばならない. この理由は, 仮想的な対生成によって初めて現れるべき時間に順行する正エネルギー電子が $t \to -\infty$ において既に定在的に存在してはならないからである. ψ_0 を負エネルギー波動関数と置けば, K_F を採用することによって自動的に上述の境界条件が満たされることを確認できる.

一般的に Feynman 理論において全時間における波動関数を決定するためには，遠い過去における正エネルギー成分と，遠い未来における負エネルギー成分を特定する必要がある．正エネルギー電子は時間に順行し，負エネルギー電子は時間を溯行するからである．これは Schrödinger 波動関数が，遠い過去の波動関数の形だけを指定すれば全時間にわたって関数を決定できたこととは著しい対照をなす性質である．

Feynman による Compton 散乱の取扱い 電子の径路が時間に順行したり時間を溯行したりするという Feynman の観点の有用性は，より複雑な問題を扱うことによって完全に理解される．この理由から，次に摂動展開(4.252) の 2 次の項を調べてみよう．具体例として Compton 散乱を取り上げる．ここでは $A_\mu(x)$ を，第 2 章で論じたような，光子の放射と吸収を等価的に表す時間に依存するポテンシャルとする．放射に関しては $(1/\sqrt{2\omega V})\epsilon_\mu^{(\alpha)}e^{-ik\cdot x}$，吸収に関しては $(1/\sqrt{2\omega V})\epsilon_\mu^{(\alpha)}e^{ik\cdot x}$ である．式(4.252) を 2 次の項まで考え，ψ_0 は $(\mathbf{p}, s)$ で入射した正エネルギー平面波を表すものとする．K を K_{F} とすると，波動関数は次のように与えられる．

$$
\begin{aligned}
\psi(x) \simeq & \sqrt{\frac{m}{EV}}u^{(s)}(\mathbf{p})e^{ip\cdot x} \\
& + \int d^4x' \int d^4x'' K_{\mathrm{F}}(x, x')\left[-e\gamma_\mu \frac{1}{\sqrt{2\omega V}}\epsilon_\mu^{(\alpha)}e^{ik\cdot x}\right] \\
& \qquad \times K_{\mathrm{F}}(x', x'')\left[-e\gamma_\nu \frac{1}{\sqrt{2\omega' V}}\epsilon_\nu^{(\alpha_1)}e^{-ik'\cdot x''}\right]\left[\sqrt{\frac{m}{EV}}u^{(s)}(\mathbf{p})e^{ip\cdot x''}\right] \\
& + \begin{Bmatrix} k \leftrightarrow k' \\ \alpha \leftrightarrow \alpha' \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.273}
$$

e の 1 次の項は，散乱に寄与を持たないので省いた．$t \to \infty$ とすると t は必ず t' よりも後の時刻になるので，最初の Green 関数 $K_{\mathrm{F}}(x, x')$ を式(4.264) の第 1 式に置き換えることができる．したがって波動関数の漸近形は次のようになる．

$$
\psi(x) \xrightarrow{t\to\infty} \sqrt{\frac{m}{EV}}u^{(s)}(\mathbf{p})e^{ip\cdot x} + \sum_{\mathbf{p}'}\sum_{s'} c^{(+)}_{\mathbf{p}', s'}(\infty)\left[\sqrt{\frac{m}{E'V}}u^{(s')}(\mathbf{p}')e^{ip'\cdot x}\right] \tag{4.274}
$$

$$
\begin{aligned}
c^{(+)}_{\mathbf{p}', s'}(\infty) = & \int d^4x' \int d^4x'' \left(\sqrt{\frac{m}{E'V}}\bar{u}^{(s')}(\mathbf{p}')e^{-ip'\cdot x'}\right)\left[-e\gamma_\mu \frac{1}{\sqrt{2\omega V}}\epsilon_\mu^{(\alpha)}e^{ik\cdot x}\right] \\
& \qquad \times K_{\mathrm{F}}(x', x'')\left[-e\gamma_\nu \frac{1}{\sqrt{2\omega' V}}\epsilon_\nu^{(\alpha')}e^{-ik'\cdot x''}\right]\left(\sqrt{\frac{m}{EV}}u^{(s)}(\mathbf{p})e^{ip\cdot x''}\right) \\
& + \begin{Bmatrix} k \leftrightarrow k' \\ \alpha \leftrightarrow \alpha' \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.275}
$$

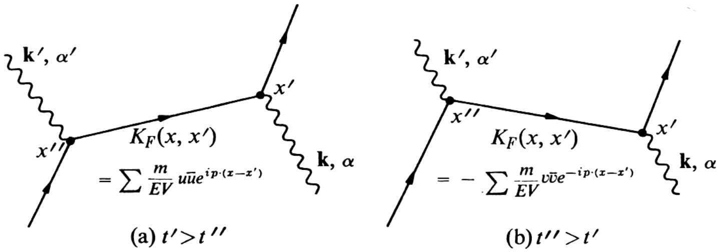


図4.17 Compton散乱を表す時間順序を区別したグラフ (時間順序化グラフ) の例. (a) と (b) の“両方”が単一の Feynmanグラフ (p.280, 図4.7(a)) に対応することに注意されたい.

$K_{\mathrm{F}}(x', x'')$ が $\langle 0|T(\psi(x')\bar{\psi}(x''))|0\rangle$ に等しいことを思い出すと, $c^{(+)}_{\mathbf{p}', s'}(\infty)$ は前節において場の量子論によって導いた Compton散乱に関する２次のＳ行列(4.174) に完全に一致していることが分かる. このように簡単な方法で正しい行列要素を導けることが, Feynman の時空的なアプローチの主要な利点である.

式(4.275) に現れる各因子を Feynman の言葉に従って, 右から左へ以下のように読み取ることができる. まず $(\mathbf{p}, s)$ によって状態を指定された入射電子が x'' において $(\mathbf{k}', \alpha')$ の光子を放射する. 続いて電子は x'' から x' へ伝播する. もし時間順序が“普通”に $t' > t''$ であれば, $K_{\mathrm{F}}(x', x'')$ には式(4.264) の第１式が充てられ, 図4.17(a) のように正エネルギーの仮想電子が時間に順行する. 時間順序が反対に $t'' > t'$ ならば, 図4.17(b) に示すように $K_{\mathrm{F}}(x', x'')$ は x'' において生成された負エネルギーの仮想電子を時間に溯行させて x' へと伝播させる. ところで我々は既に場の量子論によって $\langle 0|T(\psi(x')\bar{\psi}(x''))|0\rangle$ が, 時間順序が“普通”ならば x'' から x' への正エネルギー電子の伝播を表し, 時間順序が“反対”ならば x' から x'' への正エネルギー陽電子の伝播を表すことを見ている. ２つの観点を比較し, $K_{\mathrm{F}}(x', x'')$ が $\langle 0|T(\psi(x')\bar{\psi}(x''))|0\rangle$ に等しいことを思い起こすと, ここでも時間を溯行する負エネルギー電子が時間に順行する陽電子を表すという解釈に導かれる. 最後に x' において仮想電子 ($t' > t''$ か $t' < t''$ かによって正エネルギーまたは負エネルギーとなる) が入射光子 $(\mathbf{k}, \alpha)$ を吸収して時間に順行する正エネルギー電子 $(\mathbf{p}', s')$ になる. 以前にも強調したように, 共変な摂動論の真価は図4.17 の (a) と (b) のような２つの異なる時間順序を持つグラフを, 単一の共変な表現に統合できる点にある.

ここまで, 前の２つの節で場の量子論に基づいて厳密に導いた結果と同じものが, Feynman の時空的なアプローチによってすばやく書き下せることを見てきた. Feynman の方法を採用すれば, 計算過程が短縮され簡単になることに疑いようはな

い．これはさほど驚くべきことではない．Dirac の共変な波動方程式に直接に立脚する Feynman の方法は，計算の各段階において理論の相対論的な不変性を隠さないからである．これに対して，前の２つの節において計算規則を導いた通常のハミルトニアン形式では，Schrödinger 的な方程式(4.24) に基礎を置き，最初から時間を空間座標と区別して扱っているために，共変な行列要素に到達するまでに余分の労力を要したのである (たとえば各々は非共変な項を組み合わせるという技巧が必要であった).

本書では，まず場の量子論を用いて，いくつかの簡単な過程に関する行列要素を導き，それから同じ行列要素が Feynman の時空的アプローチによってはるかに容易に得られることを示した．Feynman のアプローチが，その簡明さと直観的な捉えやすさによって，この上なく有用であることは確かである．しかしそれと同時に Feynman の方法の理論構造には，微妙な側面があることも事実である．すなわち本来“単一粒子”の波動関数に基礎を置くはずの形式が，対(つい)生成，対(つい)消滅や真空偏極のような，同時刻に２つ以上の粒子が含まれる過程にまで利用されている．注意深い読者は既に式(4.268) の物理的解釈が，Fourier 係数の絶対値の自乗によって，その状態においてその時刻に“単一の”粒子を見いだす確率が表されるという通常の波動関数の解釈から逸脱していることに気づいたかも知れない．この理由から我々は Feynman のグラフ的な方法を，場の量子論に基づいて厳密に行列要素を構成する様々な項を計算する際に，筋道を見失わないように利用する補助的な道具と位置づけておきたい．我々の考え方は，1951年に F. J. Dyson(ダイソン) が Cornell 大学における講義で述べた見解と軌を一にするものである．

> この講義では理論展開において歩行者用の着実な道筋を辿ることにする．まず量子化の一般原理から始めて，これを共変な場の方程式に適用し，そこから粒子の存在を導いて，後から Feynman の理論に到達する．Feynman は想像力と直観を用いて正しい理論を構築し，我々よりも諸問題に対して速く正しい結果を与えることが可能であった．しかし我々は Feynman の時空的な描像を計算の基礎として用いるのではなく，場の量子論から厳密に導いた式を可視化して理解することを助ける手段として活用する方がよい．この方法によれば Feynman 理論の正しさや見通しの良さのような利点を，その論理的な難点を回避しながら享受することができる．

歴史的に，場の量子論において共変な計算を行うために相互作用表示が重要となることを最初に認識したのは S. Tomonaga (朝永振一郎) と J. Schwinger(シュウィンガー) であった．この表示を採用することで，彼らは γ_μ 結節(ヴァーテックス)部分から，曖昧さのない方法で輻射補正に含まれる有限な (観測にかかる) 部分を分離することに成功した (4.7節で論じる)．これに続いて 1949年に R. P. Feynman は２つの有名な論文“Theory of Positrons”(陽電子の理論) と“Space-time Approach to Quantum Electrodynamics”(量子

電磁力学への時空的アプローチ) を発表し，場の量子論を (あらわに) 用いることなく Dirac と Maxwell の方程式に立脚した一連の“規則”を創り上げた．彼は自身の“規則”を用いて朝永や Schwinger よりも速く正確な計算結果を導くことができた．一方 F. J. Dyson は，場の演算子の S 行列展開を基点として (本書でも行ったように) Feynman の規則が場の量子論の厳密な帰結と整合しており，朝永や Schwinger によるアプローチと，より簡単な Feynman のアプローチが数学的に等価なものであることを証明した．

読者が Feynman 規則を場の量子論から厳密に導出することを好むにしても，Feynman 流に波動方程式から直観的に導く方を好むにしても，Feynman が考案したグラフと計算規則は物理学の多くの領域に対して——量子電磁力学や高エネルギー (素粒子) 物理学だけでなく，原子核の多体問題や超伝導，剛体球 Bose 気体モデル，ポーラロンの問題などに対しても——深遠な影響を及ぼした．その理論の発表後 20 年を経ずして，Feynman グラフの技法は，理論物理において様々な問題に取り組む際に欠く事のできない最も強力な道具のひとつになった．

4.6 Møller 散乱と光子の伝播関数；中間子交換相互作用

スカラー中間子の交換　前の 2 つの節において，仮想的な電子や陽電子を含むような，すなわち一般には仮想的なスピン $\frac{1}{2}$ 粒子を含むような 2 次の過程を扱う計算方法を学んだ．本節では仮想光子を含む過程，一般には仮想ボソンを含む過程について論じる．(仮想フェルミオンと仮想ボソンの伝播を両方とも含む過程については次節で扱う．) 本節における主要な対象は，単一の“共変な光子”の交換によってもたらされる電子 - 電子散乱である．しかし，これより簡単なスピンを持たない 1 - 中間子交換の問題を先に扱うことにする．

質量 m を持つスピン $\frac{1}{2}$ の粒子を考え，これを“核子”と呼ぶことにする．これに対応する場 $\psi(x)$ は Dirac 方程式を満たし，Jordan と Wigner の規則によって量子化されるものと仮定する．これに加えて，スピンがゼロで質量が μ の中性粒子である“中間子”を考える．中間子に対応する場 $\phi(x)$ は Klein - Gordon 方程式を満たし，通常の量子化規則に従って量子化されるものと仮定する (p.89, 問題 2-3)．これらの“核子”と“中間子”は，湯川型結合を通じて相互作用をする．

$$\mathcal{H}_{\rm int} = G\bar{\psi}\psi\phi \tag{4.276}$$

ここで便宜的なモデルとして扱う“核子”と“中間子”は，自然界において実際に観測される核子や中間子に対応するものではない．3.10 節で強調したように，実験的に

観測される軽い中間子は擬スカラー中間子であり，強い相互作用におけるパリティ保存のために，式(4.287) のような型の結合には適合しない．

２つの (同種の) 核子の弾性散乱振幅を G^2 の次数まで考察してみよう．始状態において $(\mathbf{p}_1, s_1)$ および $(\mathbf{p}_2, s_2)$ の２つの核子が存在する．系の終状態におけるこれらの核子の状態を $(\mathbf{p}'_1, s'_1)$ および $(\mathbf{p}'_2, s'_2)$ とする．始状態にも終状態にも中間子は存在しないと考えるので，中間子に関して言えば始状態も終状態も真空状態である．２次の行列要素 (‘第１形式’) は，次のように与えられる．

$$S_{fi}^{(2)} = (-iG)^2 \int d^4x_1 \int_{t_2<t_1} d^4x_2 \langle N'_1, N'_2 | \bar{\psi}_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_1)\bar{\psi}_\gamma(x_2)\psi_\delta(x_2) | N_1, N_2 \rangle \times (1)_{\alpha\beta}(1)_{\gamma\delta} \langle 0|\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle \tag{4.277}$$

$$|N_1, N_2\rangle = b_2^\dagger b_1^\dagger |0\rangle, \quad |N'_1, N'_2\rangle = b_2'^\dagger b_1'^\dagger |0\rangle \tag{4.278}$$

上式では $b_1^\dagger = b^{(s_1)\dagger}(\mathbf{p}_1)$ のような自明な略記を行っている．$b_1'^\dagger$ と $b_2'^\dagger$ の順序には任意性があるが，式(4.278) のように選び，状態１および状態２がそれぞれ状態 $1'$ および状態 $2'$ と一致するときに $S^{(0)} = 1$ になるようにしておく．式(4.277) において $\bar{\psi}\psi$ を $\bar{\psi}_\alpha\psi_\beta(1)_{\alpha\beta}$ のように書いたが，この措置によって即座に γ_μ 結合 (もしくは γ_5 結合) の場合にも一般化できる．ここでは始状態において２つの核子があるので，$\psi(x_1)$ も $\psi(x_2)$ も入射核子の消滅に費やさねばならず，$\bar{\psi}(x_1)$ も $\bar{\psi}(x_2)$ も放出される核子の生成に充てなければならない．反核子を消滅させたり生成したりする必要はないので，$\bar{\psi}^{(+)}$ や $\psi^{(-)}$ を含む項は寄与を持たない．したがって式(4.277) におけるフェルミオン演算子積を次のように置き換えることができる．

$$\bar{\psi}_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_1)\bar{\psi}_\gamma(x_2)\psi_\delta(x_2) \;\rightarrow\; \bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x_1)\psi_\beta^{(+)}(x_1)\bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2)\psi_\delta^{(+)}(x_2) \tag{4.279}$$

S行列を G^2 の次数まで計算するのであれば仮想核子は現れない．始状態の“実核子”を消滅させ，終状態の“実核子”を生成するために，式(4.277) におけるフェルミオン演算子がすべて必要なので，この次数で仮想核子に関わる演算子は残らないからである．中間子の演算子に関しては $\langle 0|\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle$ を $\langle 0|\phi^{(+)}(x_1)\phi^{(-)}(x_2)|0\rangle$ に置き換えることができる．$\phi^{(+)}$ ($\phi^{(-)}$) は中間子場の消滅部分 (生成部分) である．

$$\begin{aligned} \phi^{(+)} &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} a_{\mathbf{k}} e^{ik\cdot x} \\ \phi^{(-)} &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-ik\cdot x} \end{aligned} \tag{4.280}$$

$\omega = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + \mu^2}$ である．$\langle 0|\phi^{(+)}(x_1)\phi^{(-)}(x_2)|0\rangle$ は物理的には仮想中間子が x_2 において生成され，その後 x_1 において消滅する振幅を表す（ここでは $t_1 > t_2$ である）．これは 4.4 節において仮想フェルミオンを扱った経験から明瞭である．この真空期待値については，後から言及する予定である．

フェルミオン演算子に戻って，消滅演算子が直接に始状態の核子を消滅するように，$\psi^{(+)}$ を右側に，$\psi^{(-)}$ を左側に移行させる必要がある．

$$\bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x_1)\psi_\beta^{(+)}(x_1)\bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2)\psi_\delta^{(+)}(x_2) = -\bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x_1)\bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2)\psi_\beta^{(+)}(x_1)\psi_\delta^{(+)}(x_2) + \bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x_1)\{\psi_\beta^{(+)}(x_1), \bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2)\}\psi_\delta^{(+)}(x_2) \tag{4.281}$$

式(4.281) の後の項は，単に $\bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x_1)\psi_\delta^{(+)}(x_2)$ に x_1 と x_2 を引数とする c-数の関数を掛けたものであり，ここで関心の対象としている散乱に対して寄与を持たないことを納得するのは難しくない．この項は核子 1 と核子 2 が互いに独立に時空を伝播する過程において，その一方に自己エネルギー相互作用をもたらすに過ぎない[30]．次の作業は $|N_1, N_2\rangle$ に左から $\psi_\beta^{(+)}(x_1)\psi_\delta^{(+)}(x_2)$ を作用させたものと，$\langle N_1', N_2'|$ に右側から $-\bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x_1)\bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2)$ を作用させたものの評価である．場 $\psi^{(+)}(x_1)$ および $\psi^{(+)}(x_2)$ が含む典型的な消滅演算子をそれぞれ $b_{(1)}$ および $b_{(2)}$ と書くことにしよう．$\psi_\beta^{(+)}(x_1)\psi_\delta^{(+)}(x_2)|N_1, N_2\rangle$ から生じる項は，生成・消滅演算子に関しては典型的に次のような形になる．

$$\begin{aligned} b_{(1)}b_{(2)}b_2^\dagger b_1^\dagger|0\rangle &= [b_{(1)}b_{(2)}, b_2^\dagger b_1^\dagger]|0\rangle \\ &= \left[-b_{(1)}b_2^\dagger\{b_1^\dagger, b_{(2)}\} + b_{(1)}\{b_2^\dagger, b_{(2)}\}b_1^\dagger\right]|0\rangle \\ &= \left[-\{b_{(1)}, b_2^\dagger\}\delta_{1(2)} + \{b_{(1)}, b_1^\dagger\}\delta_{2(2)}\right]|0\rangle \\ &= (-\delta_{(1)2}\delta_{1(2)} + \delta_{(1)1}\delta_{2(2)})|0\rangle \end{aligned} \tag{4.282}$$

上式には交換子の公式(3.414) を利用した．$\langle N_1', N_2'|$ に右側から $-\bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x_1)\bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2)$ を作用させた量のエルミート共役量は，次のように計算される．

$$\left[-b'_{(2)}b'_{(1)}b_2'^\dagger b_1'^\dagger|0\rangle\right]^\dagger = \left[\left(\delta_{2'(2')}\delta_{1'(1')} - \delta_{(1')2'}\delta_{1'(2')}\right)|0\rangle\right]^\dagger \tag{4.283}$$

$b'_{(1)}$ および $b'_{(2)}$ はそれぞれ $[\bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x_1)]^\dagger$ および $[\bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2)]^\dagger$ に含まれる典型的な消滅演算子を表している．式(4.282) の物理的な意味は次のように解釈される．演算子 $\psi^{(+)}(x_2)$ は核子 2 か核子 1 の何れかを消滅させるために用いられる．もし $\psi^{(+)}(x_2)$

30) この例に対応するようなダイヤグラムを“非連結グラフ”(disconnected graph) と呼ぶ．

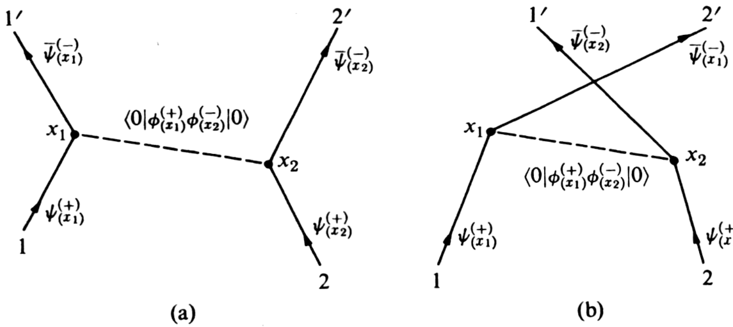


図4.18　核子-核子散乱を表す時間順序化グラフの例 ($t_1 > t_2$).

が核子 2 を消滅させたならば，$\psi^{(+)}(x_1)$ は必然的に核子 1 を消滅させなければならないし，逆の場合も同様である．

$\psi^{(+)}(x_2)$ が核子 2 を消滅させ，$\psi^{(+)}(x_1)$ が核子 1 を消滅させる場合を考えてみよう．これは式(4.282) の最後の行における第 2 項に対応する．式(4.283) を見ると 2 通りの可能性がある．すなわち (a) $\bar{\psi}^{(-)}(x_2)$ が核子 2′ を生成し，$\bar{\psi}^{(-)}(x_1)$ が核子 1′ を生成するか，さもなくば (b) $\bar{\psi}^{(-)}(x_2)$ が核子 1′ を生成し，$\bar{\psi}^{(-)}(x_1)$ が核子 2′ を生成することになる．これらの 2 つの可能性は，時間順序を指定した図4.18 のグラフによって可視化される．$\langle 0|\phi^{(+)}(x_1)\phi^{(-)}(x_2)|0\rangle$ は x_2 から x_1 への仮想中間子の伝播を表している．式(4.283) において重要な点は，図4.18(b) の過程には負号が付くことである．非相対論的な波動力学における同種粒子の散乱に関する知識に照らすと，この負号は反対称化された終状態に対して Pauli の排他律から要請されるものであることが分かる．すなわち第二量子化された Dirac 理論は“自動的に”Fermi-Dirac 統計に整合するようになっている．他の $\sqrt{2}$ などの因子は必要ではない．忘れてならないのは，全断面積を求める際に 2 光子放射型 e^-e^+ 対消滅の場合 (式(4.201)) と同様に，終状態に含まれる粒子の非識別性を考慮して因子 $\frac{1}{2}$ を加えることである．また更に $\psi^{(+)}_\delta(x_2)$ が核子 1 を消滅させ，$\psi^{(+)}_\beta(x_1)$ が核子 2 を消滅させる過程 (式(4.282) の第 1 項) も考慮しなければならない．しかしながら x_1 と x_2 の両方に関する積分を行うことになるので，$x_1 \leftrightarrow x_2$ および $\alpha\beta \leftrightarrow \gamma\delta$ の入れ換えを施して，先ほどと同じように $\psi^{(+)}_\delta(x_2)$ が核子 2 を消滅させ，$\psi^{(+)}_\beta(x_1)$ が核子 1 を消滅させるようにしてもよい．もちろん，このように変数を入れ換えると t_1 は t_2 よりも“前に”なることを考慮しなければならない (‘第 2 形式’)．式(4.282) の第 1 項において $(1) \leftrightarrow (2)$

としたものと，式(4.283) の第1項において $(1') \leftrightarrow (2')$ としたものが，それぞれ式(4.282) および式(4.283) の第2項に等しいことに注意すると，S行列(4.277) が次のようになることが分かる．

$$S_{fi}^{(2)} = (-iG)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \sqrt{\left(\frac{m}{E_1'V}\right)\left(\frac{m}{E_2'V}\right)\left(\frac{m}{E_1V}\right)\left(\frac{m}{E_2V}\right)}$$
$$\times\left[\left(\bar{u}_1' e^{-ip_1'\cdot x_1} u_1 e^{ip_1\cdot x_1}\right)\left(\bar{u}_2' e^{-ip_2'\cdot x_2} u_2 e^{ip_2\cdot x_2}\right) - \left(\bar{u}_2' e^{-ip_2'\cdot x_1} u_1 e^{ip_1\cdot x_1}\right)\left(\bar{u}_1' e^{-ip_1'\cdot x_2} u_2 e^{ip_2\cdot x_2}\right)\right]$$
$$\times\left[\langle 0|\phi^{(+)}(x_1)\phi^{(-)}(x_2)|0\rangle\theta(t_1-t_2) + \langle 0|\phi^{(+)}(x_2)\phi^{(-)}(x_1)|0\rangle\theta(t_2-t_1)\right] \tag{4.284}$$

式(4.284) を見ると，問題は次のように“新たに”定義される時間順序化積の真空期待値の計算に還元されたことが分かる．

$$\langle 0|T\big(\phi(x)\phi(x')\big)|0\rangle = \begin{cases} \langle 0|\phi(x)\phi(x')|0\rangle & \text{for } t > t' \\ \langle 0|\phi(x')\phi(x)|0\rangle & \text{for } t' > t \end{cases} \tag{4.285}$$

式(4.152) とは異なり，2つのボゾン場演算子のT積は，時間の順序が“反対”$(t' > t)$ になっても負号が付かない．諸問題を扱う際に実粒子を消滅したり生成することに費やされない残りの演算子は，フェルミオンについては自ずから式(4.153) のような組合せを構成し，ボゾンについては式(4.285) のような組合せを構成する．式(4.285) は $t > t'$ の場合には，

$$\begin{aligned}\langle 0|\phi(x)\phi(x')|0\rangle &= \langle 0|\phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(x')|0\rangle \\ &= \lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{\mathbf{k}'}\frac{1}{2\sqrt{\omega\omega'}}\exp\left[i(k\cdot x - k'\cdot x')\right]\langle 0|a_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}'}^\dagger|0\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{2\omega}\exp\left[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - i\omega(t-t')\right]\end{aligned} \tag{4.286}$$

となり，$t' > t$ ならば次のようになる．

$$\begin{aligned}\langle 0|\phi(x')\phi(x)|0\rangle &= \langle 0|\phi^{(+)}(x')\phi^{(-)}(x)|0\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{2\omega}\exp\left[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - i(-\omega)(t-t')\right]\end{aligned} \tag{4.287}$$

ここでもフェルミオンの場合と同様に (式(4.154)-(4.162)参照)，$t > t'$ と $t' > t$ の両方に適用できる式を，次のように与えることができる．

$$\langle 0|T\big(\phi(x)\phi(x')\big)|0\rangle = -\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{e^{ik\cdot(x-x')}}{k^2+\mu^2-i\epsilon} \tag{4.288}$$

ここで,

$$k^2 = |\mathbf{k}|^2 - |k_0|^2 \tag{4.289}$$

であり, k_0 は一般に $\omega = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + \mu^2}$ とは一致しない変数である. 既にフェルミオンの場合について詳細に考察してあるので, 式(4.288) (中間子の伝播関数と呼ばれる) の意味を理解することは容易である. t が t' の後の時刻であれば, x' において生成された仮想中間子は x' から x へ伝播して x において消滅する. t' が t の後の時刻であれば, 仮想中間子が x から x' へ伝播する. このように式(4.285) に示した真空期待値の組合せは, 自動的に仮想中間子が一方の核子から放射されてもう一方の核子に吸収される過程の "因果関係" を正しく成立させる. この点は Feynman の理論に先立って, E. C. G. Stueckelberg によって強調された. ここで再び2つの時空点 x と x' の不変距離が空間的(スペースライク)である場合には t が t' の前か後かという区別は Lorentz 不変な概念ではないこと, および中間子の伝播関数は光円錐の外部 $((x-x')^2 > 0)$ においてもゼロにはならないことに注意を促しておく. しかしながら式(4.285) の組合せが Lorentz 不変であることは, その Fourier 積分の形(4.288) を見れば自明である. 次のように関数 $\Delta_{\mathrm{F}}(x-x')$ を定義している文献が多い.

$$\frac{1}{2}\Delta_{\mathrm{F}}(x-x') = -\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{e^{ik\cdot(x-x')}}{k^2+\mu^2-i\epsilon} \tag{4.290}$$

Δ_{F} の式の μ を m に置き換えれば, これは前に定義した S_{F} と次のように関係づけられる.

$$\left[S_{\mathrm{F}}(x-x')\right]_{\alpha\beta} = \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right)_{\alpha\beta} \Delta_{\mathrm{F}}(x-x') \tag{4.291}$$

伝播関数の式(4.288) をS行列の式(4.284) に代入して x_1 と x_2 に関する積分を実行すると, 次式によって常套的に定義される共変な $\mathcal{M}$ 行列の式を容易に得ることができる.

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-p_1'-p_2')\sqrt{\left(\frac{m}{E_1'V}\right)\left(\frac{m}{E_2'V}\right)\left(\frac{m}{E_1V}\right)\left(\frac{m}{E_2V}\right)}\,\mathcal{M}_{fi} \tag{4.292}$$

2光子放射型 e^-e^+ 対消滅において式(4.163) から式(4.166) を得たときと同様にして, G^2 の次数までの共変な $\mathcal{M}$ 行列は, 式(4.284) から次のように与えられる.

$$-i\mathcal{M}_{fi} = (-iG)^2\left[\frac{(\bar{u}_1'u_1)(\bar{u}_2'u_2)}{i[(p_1-p_1')^2+\mu^2-i\epsilon]} - \frac{(\bar{u}_2'u_1)(\bar{u}_1'u_2)}{i[(p_1-p_2')+\mu^2-i\epsilon]}\right] \tag{4.293}$$

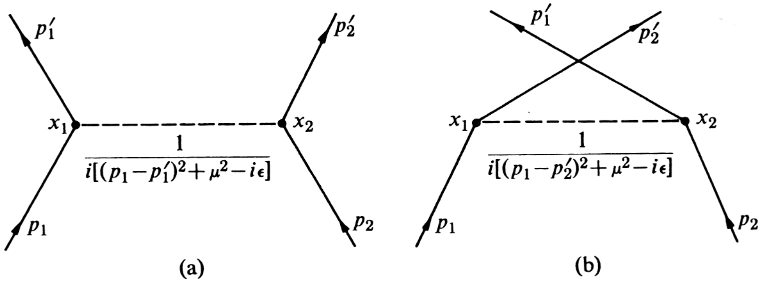


図4.19　核子-核子散乱を表す Feynman グラフ．(a) 直接散乱．(b) 交換散乱．

式(4.293) の中の各因子の意味を，図4.19 に示した Feynman グラフによってそのまま理解することができる．時間順序を指定した図4.18 (p.316) と異なり，ここでは $t_1 > t_2$ の場合と $t_2 > t_1$ の場合を両方とも想定して，仮想中間子が x_2 において生成したと見ても x_1 において生成したと見てもよい (その後で x_1 もしくは x_2 において消滅する)．この例においても $-i\mathcal{M}$ を書くための“規則”は著しく簡単である．4.4 節において $(-i\gamma{\cdot}q+m)/[i(q^2+m^2-i\epsilon)]$ を 4 元運動量 q を持つ仮想的なスピン $\frac{1}{2}$ のフェルミオンに対応させたように，ここでは 4 元運動量 q を持つスピンがゼロの中間子に $1/[i(q^2+\mu^2-i\epsilon)]$ を対応させればよい．仮想粒子のエネルギー-運動量を扱う際には，各結節点(ヴァーテックス)においてエネルギー-運動量保存を仮定する．(図4.19(a) において仮想中間子の 4 元運動量を，中間子が核子 1 から放出されると見るか核子 2 から放出されると見るかによって，$p_1 - p_1'$ $(= p_2' - p_2)$ もしくは $p_1' - p_1$ と区別してもよいが，ボゾンの伝播関数は q^2 だけに依存するので，仮想ボゾンにおいてこの問題は重要ではない．) 式(4.276) のスカラー結合を想定して，各結節点(ヴァーテックス)において，電磁相互作用の場合の $(-e\gamma_\mu)$ の代わりに $(-iG)$ を充てる．更に図4.19(a) (フェルミオン-フェルミオン‘直接’散乱) に関しては結果に $+1$ を，図4.19(b) (フェルミオン-フェルミオン‘交換’散乱) に関しては -1 を掛ける．

より複雑な光子の交換を論じる前に，$\mathcal{M}$ 行列要素(4.293) を導く別の 2 つの方法について簡単に述べる．まず量子化していない中間子場を用いた半古典的な考察によって，これを推定する方法を示そう．湯川の着想によれば，核子 1 が存在することによって (‘古典的な’) 中間子場 $\phi^{(1)}$ が生じる．相互作用ラグランジアンが式(4.276) に負号を付けたものであるならば，場 $\phi^{(1)}$ は次の非斉次 Klein-Gordon 方程式を満たすと考えられる．

$$\Box\phi^{(1)}(x) - \mu^2\phi^{(1)}(x) = Gs^{(1)}(x) \tag{4.294}$$

右辺の $s^{(1)}(x)$ は，核子 1 の始状態と終状態の波動関数から構築される，次のスカラー不変量である．

$$s^{(1)} = \sqrt{\left(\frac{m}{E_1'V}\right)\left(\frac{m}{E_1V}\right)}\,\bar{u}_1'u_1e^{i(p_1-p_1')\cdot x} \tag{4.295}$$

$\phi^{(1)}$ の時空座標依存因子も $e^{i(p_1-p_1')\cdot x}$ と置けるものと仮定して微分方程式(4.294)を解くと，次の解が得られる．

$$\phi^{(1)}(x) = -\frac{G}{(p_1-p_1')^2+\mu^2}\sqrt{\left(\frac{m}{E_1'V}\right)\left(\frac{m}{E_1V}\right)}\,\bar{u}_1'u_1e^{i(p_1-p_1')\cdot x} \tag{4.296}$$

我々は核子 1 と核子 2 の間に生じる相互作用に関心があるので，核子 1 から核子 2 への影響を計算する．核子 2 と，(核子 1 から生じている) 場 $\phi^{(1)}$ との相互作用を表す最低次のハミルトニアンは次のようになる．

$$\begin{aligned}H_{\text{int}} &= G\int\phi^{(1)}(x)\,s^{(2)}(x)\,d^3x\\ &= G\int\phi^{(1)}(x)\sqrt{\left(\frac{m}{E_2'V}\right)\left(\frac{m}{E_2V}\right)}\,\bar{u}_2'u_2e^{i(p_2-p_2')\cdot x}d^3x\end{aligned} \tag{4.297}$$

しかしS行列展開(4.36) を見ると，H_{int} の時間積分の $(-i)$ 倍は $(S-1)$ 行列要素の最低次項にあたる．したがって，この最低次の G^2 の項 (ここでは $H_{\text{int}}\propto G\phi^{(1)}\propto G^2$) は，次のようになる．

$$\begin{aligned}S_{fi}^{(2)} &= -(-i)G^2\sqrt{\left(\frac{m}{E_1'V}\right)\left(\frac{m}{E_1V}\right)\left(\frac{m}{E_2'V}\right)\left(\frac{m}{E_2V}\right)}\\ &\quad\times\int d^4x\,\frac{(\bar{u}_1'u_1)(\bar{u}_2'u_2)}{(p_1-p_1')^2+\mu^2}\exp\left[i(p_1+p_2-p_1'-p_2')\cdot x\right]\\ &= (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-p_1'-p_2)\\ &\quad\times\sqrt{\left(\frac{m}{E_1'V}\right)\left(\frac{m}{E_1V}\right)\left(\frac{m}{E_2'V}\right)\left(\frac{m}{E_2V}\right)}\,\frac{(-G^2)(\bar{u}_1'u_1)(\bar{u}_2'u_2)}{i[(p_1-p_1')^2+\mu^2]}\end{aligned} \tag{4.298}$$

上式は，式(4.293) において“直接散乱”を表す第 1 項に完全に整合している．終状態の 2 - フェルミオン波動関数に対して反対称化の規則を考慮すれば，式(4.293) の第 2 項が得られる．

式(4.293) を得るための第 3 の方法もあるが，これは次のようにする．仮想中間子の吸収と放出について語るという意味において，この形式でも第 1 の方法と同様に中

間子場は量子化されている．しかしS行列の計算は，エネルギー差の分母に基礎を置く旧式の２次摂動論にしたがって行う．散乱過程は２段階の素過程から構成されるものと見なされる．第１段階としては，始状態 $|N_1, N_2\rangle$ が次の２種類の中間状態の何れかに遷移する．すなわち (i) 仮想中間子と核子１と核子 $2'$ が存在する中間状態か，もしくは (ii) 仮想中間子と核子 $1'$ と核子２が存在する中間状態になる．どちらの中間状態からも終状態 $|N_1', N_2'\rangle$ へ移行する．これらの２種類の中間状態は，単一の図4.19(a) (p.319) のグラフに時間順序の区別を導入することによって生じる２つの別々のグラフに対応する．(i) 型の中間状態は，図4.18(a) (p.316) のように核子２がまず仮想中間子を放出してから，それがその後に核子１に吸収されるまでの状態である．これに対して (ii) 型の中間状態は，まず核子１が仮想中間子を放出し，それがその後に核子２に吸収されるまでの状態である．第２章で示した規則によれば，中間子の放出および吸収は，それぞれ核子の時間に依存する (スカラーの) ポテンシャルとの相互作用 $H_{\rm int}^{(\rm emis)} = G\sqrt{1/2\omega V}\,e^{-ik\cdot x}$ および $H_{\rm int}^{(\rm abs)} = G\sqrt{1/2\omega V}\,e^{ik\cdot x}$ と等価である (式(2.102)参照)．核子２が (核子１は変化のないままで) 運動量 $\mathbf{k}$，エネルギー ω の中間子を放出して核子 $2'$ に変わるとき，この過程を“時間に依存しない”行列要素 $H_{2'2}^{(\rm emis)} = \langle 2'|H_{\rm int}^{(\rm emis)}|2\rangle$ に対応させることができる．

$$\begin{aligned} H_{2'2}^{(\rm emis)} &= G\sqrt{\left(\frac{m}{E_2'V}\right)\left(\frac{m}{E_2V}\right)\left(\frac{1}{2\omega V}\right)}\int_V d^3x\,\bar{u}_2' u_2 e^{i(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_2'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} \\ &= G\sqrt{\left(\frac{m}{E_2'V}\right)\left(\frac{m}{E_2V}\right)\left(\frac{1}{2\omega V}\right)}\,\bar{u}_2' u_2 V\delta_{\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_2'+\mathbf{k}} \end{aligned} \tag{4.299}$$

ここで ω は，通常のエネルギー-運動量の関係を満たす．

$$\omega = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + \mu^2}$$

同様に，核子１が仮想中間子を吸収して核子 $1'$ になる過程には，行列要素 $H_{1'1}^{(\rm abs)} = \langle 1'|H_{\rm int}^{(\rm abs)}|1\rangle$ が充てられる．

$$H_{1'1}^{(\rm abs)} = G\sqrt{\left(\frac{m}{E_1'V}\right)\left(\frac{m}{E_1V}\right)\left(\frac{1}{2\omega V}\right)}\,\bar{u}_1' u_1 V\delta_{\mathbf{p}_1+\mathbf{k},\mathbf{p}_1'} \tag{4.300}$$

さらに旧式の摂動論によれば，我々は摂動行列要素の積を“エネルギー分母”で割る必要がある．(i) 型の中間状態を持つ仮想過程のエネルギー分母は，

$$(E_1 + E_2) - (E_1 + E_2') - \omega$$

である．このような手順で，２つの核子間の実効的ハミルトニアンの行列要素として，

次の形が得られる．

$$\sum_{\mathbf{k}}\left(\frac{H_{1'1}^{(\mathrm{abs})}H_{2'2}^{(\mathrm{emis})}}{(E_1+E_2)-(E_1+E_2')-\omega}+\frac{H_{2'2}^{(\mathrm{abs})}H_{1'1}^{(\mathrm{emis})}}{(E_1+E_2)-(E_1'+E_2)-\omega}\right)$$
$$=\sqrt{\left(\frac{m}{E_1V}\right)\left(\frac{m}{E_2V}\right)\left(\frac{m}{E_1'V}\right)\left(\frac{m}{E_2'V}\right)}\frac{G^2V}{2\omega}\delta_{\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_1'+\mathbf{p}_2'}\bar{u}_1'u_1\bar{u}_2'u_2$$
$$\times\left[\frac{1}{E_2-E_2'-\omega}+\frac{1}{E_1-E_1'-\omega}\right]$$
$$=\sqrt{\left(\frac{m}{E_1V}\right)\left(\frac{m}{E_2V}\right)\left(\frac{m}{E_1'V}\right)\left(\frac{m}{E_2'V}\right)}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1'-\mathbf{p}_2')$$
$$\times G^2\bar{u}_1'u_1\bar{u}_2'u_2\left[\frac{1}{2\omega(E_2-E_2'-\omega)}+\frac{1}{2\omega(E_1-E_1'-\omega)}\right] \tag{4.301}$$

ここでは $V\to\infty$ とした[§]．$S^{(2)}$ 行列要素と上式は，単に $(-2\pi i)\times\delta(E_1+E_2-E_1'-E_2')$ だけ異なるにすぎない．式(4.301) の最後の行の括弧内を，簡単な形に直すことができる．全エネルギー保存に基づいて E_2-E_2' を $-(E_1-E_1')$ に置き換えると，次のようになる．

$$\frac{1}{2\omega(E_2-E_2'-\omega)}+\frac{1}{2\omega(E_1-E_1'-\omega)}=-\left(\frac{1}{2\omega}\right)\left[\frac{\omega-(E_1-E_1')+\omega+(E_1-E_1')}{\omega^2-(E_1-E_1')^2}\right]$$
$$=-\frac{1}{|\mathbf{k}|^2+\mu^2-(E_1-E_1')^2}$$
$$=-\frac{1}{(p_1-p_1')^2+\mu^2} \tag{4.302}$$

上式は因子 i の違いを除いて，４元運動量空間におけるスピン-ゼロの中間子の伝播関数そのものである．したがって式(4.301) に $-2\pi i\delta(E_1+E_2-E_1'-E_2')$ を掛けたものは，すでに共変な方法に基づいて求めた $S^{(2)}$ 行列要素 (式(4.292)-(4.293)) の直接散乱項に等しい．ここでも２つの非共変な式を組み合わせることによって，単一の，より簡単な共変な式が得られたことに注意してもらいたい．

上の計算は，$E_2-E_2'-\omega$ のようなエネルギー分母を用いる (戦前の) 旧式の摂動論と，相対論的に不変な $(p_1-p_1')^2+\mu^2$ のような形の分母を用いる (戦後の) 共変な摂動論の本質的な違いを浮き彫りにしている．旧式の方法においても各結節点(ヴァーテックス)で運動量が保存することは式(4.299) と式(4.300) の Kroneckerのデルタによって示されている．しかしこのとき中間状態のエネルギー保存は想定されていない．実際，分母には始状態と中間状態にエネルギーの“差”があり得ることを前提にして，これが用いられる．他

[§](訳註) すなわち Kroneckerのデルタを $\delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}\to\{(2\pi)^3/V\}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$ のようにデルタ関数へ移行させている．

方“共変な方法”ではエネルギーと運動量が同等に扱われ，$\int d^4x \exp[i(p_2-p_2'-k)\cdot x]$ のような4次元積分が現れるので各結節点（ヴァーテックス）の運動量保存とエネルギー保存が“両方とも”自動的に満たされる．しかしながら，ここで交換される中間子は，やはり Feynman ダイヤグラムによって表現されるそのままの意味で実体的に考えるべきものでは“ない”．共変な形式の下で交換される仮想中間子は $\omega = \sqrt{|\mathbf{k}|^2+\mu^2}$ を満たしておらず，一般に $k=(\mathbf{k}, ik_0)$，$k_0 \neq \sqrt{|\mathbf{k}|^2+\mu^2}$ なので，

$$k^2+\mu^2 = |\mathbf{k}|^2 - |k_0|^2 + \mu^2 \neq 0 \tag{4.303}$$

となる．実際，運動量空間における共変な中間子伝播関数の分母に現れるのは $k^2 = (p_1-p_1')^2$ と $-\mu^2$ の“違い”である†．我々はこの例によって，共変な摂動論が空間積分と時間積分を“一括して”行うことの利点を真に理解することができる．

Møller 散乱（電子-電子散乱）の行列要素　ここまでで，本節における主要な問題——2つの相対論的な電子同士の散乱の問題——に取り組むための準備は整った．この電子-電子散乱は，1931年にこの問題を最初に扱った C. Møller に因んで，通常は Møller 散乱と呼ばれる．まず量子電磁力学における基本的なラグランジアンの形を思い出そう．

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \bar{\psi}\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\psi + ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu \tag{4.304}$$

付録Aの技法を Dirac 電子に適用して，このラグランジアンから全ハミルトニアンを次のように得ることができる．

$$H = H_0 + H_{\mathrm{I}} \tag{4.305}$$

$$H_0 = \frac{1}{2}\int\left(|\mathbf{E}^{(\perp)}|^2 + |\mathbf{B}^{(\perp)}|^2\right)d^3x + \int\bar{\psi}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + m)\psi\, d^3x \tag{4.306}$$

$$H_{\mathrm{I}} = -ie\int\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi\cdot\mathbf{A}^{(\perp)}d^3x + \frac{e^2}{2}\int d^3x_1\int d^3x_2 \frac{(\bar{\psi}\gamma_4\psi)_{\mathbf{x}_1,t}(\bar{\psi}\gamma_4\psi)_{\mathbf{x}_2,t}}{4\pi|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|} \tag{4.307}$$

$(\bar{\psi}\gamma_4\psi)_{\mathbf{x}_1,t}$ という表記は $\bar{\psi}(\mathbf{x}_1,t)\gamma_4\psi(\mathbf{x}_1,t)$ を意味する．上付きの $(\perp)$ は“横波”の成分を表す．この方法では A_μ の横波成分だけを動的に扱い，基本的な相互作用 (4.307) は，横波電磁場と $\mathbf{j} = ie\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi$ の相互作用項と，電荷密度間の“瞬時（同時刻）

†（訳註）旧式の2次の摂動論では各粒子が相対論的な性質を守りながら（式(4.299) の下の但し書きに注意せよ）一時的にエネルギー保存の制約を外された状態として中間状態を捉えるのに対し，共変な摂動論では2次過程の中間状態を，エネルギー保存は（運動量保存とともに）形式的に成立しているけれども一時的に相対論的な運動量-エネルギーの分散関係 ($p^2+m^2=|\mathbf{p}|^2-E^2+m^2=0$ や $k^2+\mu^2=|\mathbf{k}|^2-\omega^2+\mu^2=0$) の制約を外れた仮想粒子が（伝播関数の成分の形で）存在し得る状態として捉える．p.273 訳註も参照されたい．

の"Coulomb相互作用 (*instantaneous* Coulomb interaction) の項から成る. A_μ の横波成分だけを，第2章に示した方法によって量子化する.

$$A_j^{(\perp)}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(\epsilon_j^{(\alpha)}a_{\mathbf{k}\alpha}e^{ik\cdot x} + \epsilon_j^{(\alpha)}a_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger}e^{-ik\cdot x}\right) \tag{4.308}$$

Dirac場も量子化するときに，$\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi$ と $\bar{\psi}\gamma_4\psi$ が両方とも適正に反対称化された演算子になるものと解釈する．したがって $\langle 0|\bar{\psi}\gamma_\mu\psi|0\rangle = 0$ である (式(4.59)参照). 4.2節のS行列展開を，H_{I} に式(4.307) を適用して実行する.

相互作用ハミルトニアンは2つの項から成るので，2電子間の相互作用の問題は，スカラー中間子の交換による核子-核子相互作用よりも少々複雑になる．幸い，式(4.307) の第1項はスカラー結合密度(4.276) の空間積分と完全な類似性を持つ．したがって Mϕller散乱において，横波モードの光子の交換に関わる部分については，ひとつの中間子の交換を通じた核子-核子相互作用について行った計算を，恒等行列を γ_i に，結合定数 G を $-ie$ に置き換えることによってそのまま流用できる．式(4.277) から式(4.284) までの計算過程は本質的に同じなので，式(4.284) に相当するS行列要素の式を即座に書くことができる.

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(\mathrm{trans})} = (-e)^2 &\sqrt{\left(\frac{m}{E_1'V}\right)\left(\frac{m}{E_2'V}\right)\left(\frac{m}{E_1V}\right)\left(\frac{m}{E_2V}\right)}\int d^4x_1\int d^4x_2 \\ &\times\Big[\left(\bar{u}_1'e^{-ip_1'\cdot x_1}\gamma_i u_1 e^{ip_1\cdot x_1}\right)\left(\bar{u}_2'e^{-ip_2'\cdot x_2}\gamma_j u_2 e^{ip_2\cdot x_2}\right) \\ &\quad -\left(\bar{u}_2'e^{-ip_2'\cdot x_1}\gamma_i u_1 e^{ip_1\cdot x_1}\right)\left(\bar{u}_1'e^{-ip_1'\cdot x_2}\gamma_j u_2 e^{ip_2\cdot x_2}\right)\Big] \\ &\times\langle 0|T\left(A_i^{(\perp)}(x_1)\,A_j^{(\perp)}(x_2)\right)|0\rangle \end{aligned} \tag{4.309}$$

横波電磁場に関するT積は，式(4.285) と同様に定義される．このT積の真空期待値を評価しよう．$t > t'$ の場合，次のようになる.

$$\begin{aligned} \langle 0|T\left(A_i^{(\perp)}(x)\,A_j^{(\perp)}(x')\right)|0\rangle &\overset{t>t'}{=} \langle 0|A_i^{(\perp)}(x)\,A_j^{(\perp)}(x')|0\rangle \\ &= \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{\mathbf{k}'}\sum_{\alpha}\sum_{\alpha'}\frac{1}{2\sqrt{\omega\omega'}}\epsilon_i^{(\alpha)}\epsilon_j^{(\alpha')}e^{i(k\cdot x-k'\cdot x')}\langle 0|a_{\mathbf{k}\alpha}a_{\mathbf{k}'\alpha'}^{\dagger}|0\rangle \\ &= \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{\alpha}\frac{1}{2\omega}\epsilon_i^{(\alpha)}\epsilon_j^{(\alpha)}e^{ik\cdot(x-x')} \end{aligned} \tag{4.310}$$

上式を中間子の式(4.286) と比べると，偏極 (偏光) に関する和 $\sum_{\alpha=1}^{2}\epsilon_i^{(\alpha)}\epsilon_j^{(\alpha)}$ が新たに加わっている．この和は $\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}$，$\boldsymbol{\epsilon}^{(2)}$，$\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ が正規直交系になることを思い起こ

せば容易に実行できる．ここで，

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(3)} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \tag{4.311}$$

と“定義”しておくと，$\epsilon_i^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ が通常の x，y，z 軸に沿った空間内の単位ベクトルの組を，新たに $\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}$，$\boldsymbol{\epsilon}^{(2)}$，$\boldsymbol{\epsilon}^{(3)} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ にという組に変換する直交行列となることは明らかである．したがって直交性の条件として，

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \epsilon_i^{(\alpha)} \epsilon_j^{(\alpha)} = \delta_{ij} \tag{4.312}$$

が与えられる[31]．あるいは，これと等価な関係として，

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \epsilon_i^{(\alpha)} \epsilon_j^{(\alpha)} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\mathbf{k}|^2} \tag{4.313}$$

も成り立つ．真空期待値を求めるための残りの作業として，式(4.286) から式(4.288) までと全く類似のことを行うと，次の結果を得る．

$$\langle 0 | \left(A_i^{(\perp)}(x) \, A_j^{(\perp)}(x') \right) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\mathbf{k}|^2} \right) \frac{e^{ik\cdot(x-x')}}{i(k^2 - i\epsilon)} \tag{4.314}$$

式(4.314) を式(4.309) に代入して d^4x_1 と d^4x_2 の積分を実行すると，共変な $\mathcal{M}$ 行列の横波光子の交換による部分は (e^2 の次数までで) 次のように与えられる．

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M}_{fi}^{(\text{trans})} = \; & \frac{(-e)^2}{i(q^2 - i\epsilon)} \left[(\bar{u}_1' \boldsymbol{\gamma} u_1) \cdot (\bar{u}_2' \boldsymbol{\gamma} u_2) - (\bar{u}_1' \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{q}} u_1)(\bar{u}_2' \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{q}} u_2) \right] \\ & - \frac{(-e)^2}{i(q'^2 - i\epsilon)} \left[(\bar{u}_2' \boldsymbol{\gamma} u_1) \cdot (\bar{u}_1' \boldsymbol{\gamma} u_2) - (\bar{u}_2' \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{q}} u_1)(\bar{u}_1' \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{q}} u_2) \right] \end{aligned} \tag{4.315}$$

上式において，

$$\begin{aligned} q &= p_1 - p_1' = p_2' - p_2 \\ q' &= p_1 - p_2' = p_1' - p_2 \end{aligned} \tag{4.316}$$

であり，$\hat{\mathbf{q}}$ および $\hat{\mathbf{q}}'$ はそれぞれ $\mathbf{q}$ および $\mathbf{q}'$ の方向の単位ベクトルである．横波光子の交換に関しては，さしあたりここまで求まればよい．

次に瞬時の Coulomb 相互作用を表す，式(4.307) の第２項を調べてみよう．電子-電子相互作用の振幅を e^2 の次数まで求めたいのであれば，この項に関しては“１次”

31) たとえば Goldstein (1951), pp.97-98 を参照．

の過程だけを考えればよい．$S^{(1)}$ を書き下す規則に従うと，Coulomb相互作用の寄与について次式が得られる．

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(\mathrm{Coul})} &= -\frac{ie^2}{2}\int dt \int d^3x_1 \int d^3x_2 \frac{\langle e_1', e_2' | (\bar{\psi}\gamma_4\psi)_{\mathbf{x}_1,t}(\bar{\psi}\gamma_4\psi)_{\mathbf{x}_2,t} | e_1, e_2\rangle}{4\pi|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \\ &= -\frac{ie^2}{2}\int d^3x_1 \int d^3x_2\, \delta(t_2 - t_1) \frac{\langle e_1', e_2' | \bar{\psi}(x_1)\gamma_4\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma_4\psi(x_2) | e_1, e_2\rangle}{4\pi|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \end{aligned} \tag{4.317}$$

フェルミオン場の演算子を始状態と終状態に作用させる方法はこれまでと同様であるが，ここでは瞬時に相互作用が及ぶ扱い方になるので t_1 が t_2 の前か後かという区別に頭を悩ませる必要はない．因子 $\frac{1}{2}$ は，$\psi(x_2)$ が電子 1 を消滅させても電子 2 を消滅させてもよいということから生じる因子 2 と打ち消しあう (式(4.282) と式(4.283) を参照)．したがって式(4.317) は次のようになる．

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(\mathrm{Coul})} = -ie^2 &\sqrt{\left(\frac{m}{E_1'V}\right)\left(\frac{m}{E_2'V}\right)\left(\frac{m}{E_1V}\right)\left(\frac{m}{E_2V}\right)} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \frac{\delta(t_2 - t_1)}{4\pi|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|} \\ &\times \Big[\left(\bar{u}_1' e^{-ip_1'\cdot x_1}\gamma_4 u_1 e^{ip_1\cdot x_1}\right)\left(\bar{u}_2' e^{-ip_2'\cdot x_2}\gamma_4 u_2 e^{ip_2\cdot x_2}\right) \\ &\quad - \left(\bar{u}_2' e^{-ip_2'\cdot x_1}\gamma_4 u_1 e^{ip_1\cdot x_1}\right)\left(\bar{u}_1' e^{-ip_1'\cdot x_2}\gamma_4 u_2 e^{ip_2\cdot x_2}\right)\Big] \end{aligned} \tag{4.318}$$

直接項と交換項の違いは，符号を除くと終状態の指標の入れ換え $p_1' \leftrightarrow p_2'$，$s_1' \leftrightarrow s_2'$ だけなので，直接項だけを見ることにしよう．時空依存性に関しては，平面波の積を次のように書き直すと都合がよい．

$$\begin{aligned} &\exp\left(-ip_1'\cdot x_1 + ip_1\cdot x_1 - ip_2'\cdot x_2 + ip_2\cdot x_2\right) \\ &\quad = \exp\left[-i(p_2' - p_2)\cdot(x_2 - x_1)\right] \exp\left[i(p_1 + p_2 - p_1' - p_2')\cdot x_1\right] \end{aligned} \tag{4.319}$$

d^4x_2 の積分は全時空にわたるので，この代わりに $x_3 = x_2 - x_1$ と置いて d^4x_3 に関する積分を行ってもよい．t_3 の積分はデルタ関数をなくすだけであるが，d^3x_3 の積分は Coulombポテンシャルの 3 次元 Fourier変換 $1/|\mathbf{p}_2' - \mathbf{p}|^2$ を生じる．d^4x_1 の積分は，$\mathcal{M}$ 行列の定義式において分離される 4 次元デルタ関数の $(2\pi)^4$ 倍の因子を与える．このようにして，次の結果が得られる．

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M}_{fi}^{(\mathrm{Coul})} &= e^2\left[\frac{(\bar{u}_1'\gamma_4 u_1)(\bar{u}_2'\gamma_4 u_2)}{i|\mathbf{p}_2' - \mathbf{p}_1|^2} - \frac{(\bar{u}_2'\gamma_4 u_1)(\bar{u}_1'\gamma_4 u_2)}{i|\mathbf{p}_1' - \mathbf{p}_2|^2}\right] \\ &= (-e)^2\left[\frac{(\bar{u}_1'\gamma_4 u_1)(\bar{u}_2'\gamma_4 u_2)}{i|\mathbf{q}|^2} - \frac{(\bar{u}_2'\gamma_4 u_1)(\bar{u}_1'\gamma_4 u_2)}{i|\mathbf{q}'|^2}\right] \end{aligned} \tag{4.320}$$

この段階において $\mathcal{M}_{fi}^{(\mathrm{trans})}$ も $\mathcal{M}_{fi}^{(\mathrm{Coul})}$ も，“単独では”共変ではないことを強調しておく必要がある．しかしながら両者の和を考えると共変で，かつ簡単な式が得られることをこれから示す．このことを具体的に見るために，まず式(4.320)の直接散乱項を次のように書き直す．

$$(-e)^2\frac{(\bar{u}_1'\gamma_4u_1)(\bar{u}_2'\gamma_4u_2)}{i|\mathbf{q}|^2}=(-e)^2(\bar{u}_1'\gamma_4u_1)(\bar{u}_2'\gamma_4u_2)\left[\frac{|\mathbf{q}|^2-|q_0|^2-i\epsilon}{|\mathbf{q}|^2}\right]\frac{1}{i(q^2-i\epsilon)}$$
$$=(-e)^2\left[\frac{(\bar{u}_1'\gamma_4u_1)(\bar{u}_2'\gamma_4u_2)}{i(q^2-i\epsilon)}+\frac{(iq_0)^2}{|\mathbf{q}|^2}\frac{(\bar{u}_1'\gamma_4u_1)(\bar{u}_2'\gamma_4u_2)}{i(q^2-i\epsilon)}\right] \tag{4.321}$$

一方，自由粒子スピノルの性質(3.105)を u_1，u_1' について合わせて考えると，

$$\bar{u}_1'\gamma\cdot qu_1=-i\bar{u}_1'\left[i\gamma\cdot(p_1-p_1')\right]u_1=0 \tag{4.322}$$

が成り立つので，

$$iq_0\bar{u}_1'\gamma_4u_1=-\bar{u}_1'\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{q}u_1 \tag{4.323}$$

である．同様に，式(4.316)を念頭に置くと，

$$iq_0\bar{u}_2'\gamma_4u_2=-\bar{u}_2'\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{q}u_2 \tag{4.324}$$

なので，

$$(iq_0)^2(\bar{u}_1'\gamma_4u_1)(\bar{u}_2'\gamma_4u_2)=(\bar{u}_1'\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{q}u_1)(\bar{u}_2'\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{q}u_2) \tag{4.325}$$

となり，式(4.321)は次のように書き直される．

$$(-e)^2\frac{(\bar{u}_1'\gamma_4u_1)(\bar{u}_2'\gamma_4u_2)}{i|\mathbf{q}|^2}=(-e)^2\left[\frac{(\bar{u}_1'\gamma_4u_1)(\bar{u}_2'\gamma_4u_2)}{i(q^2-i\epsilon)}+\frac{(\bar{u}_1'\boldsymbol{\gamma}\cdot\hat{\mathbf{q}}u_1)(\bar{u}_2'\boldsymbol{\gamma}\cdot\hat{\mathbf{q}}u_2)}{i(q^2-i\epsilon)}\right] \tag{4.326}$$

ここから注目すべき結果が導かれる．式(4.326)の第2項は，式(4.315)の最初の括弧の中の第2項と正確に相殺する．交換散乱項についても同様の相殺が起こる．したがって，不変な $\mathcal{M}$ 行列の要素は最終的に次のようになる．

$$-i\mathcal{M}_{fi}=-i\left(\mathcal{M}_{fi}^{(\mathrm{trans})}+\mathcal{M}_{fi}^{(\mathrm{Coul})}\right)$$
$$=(-e)^2\left[\frac{(\bar{u}_1'\gamma_\mu u_1)(\bar{u}_2'\gamma_\mu u_2)}{i[(p_1-p_1')^2-i\epsilon]}-\frac{(\bar{u}_2'\gamma_\mu u_1)(\bar{u}_1'\gamma_\mu u_2)}{i[(p_1-p_2')^2-i\epsilon]}\right] \tag{4.327}$$

この最後の結果(4.327)は単純であり，最初の量子電磁力学のラグランジアン(4.304)と同様に共変性が明らかである．このことは，我々が上の単純な行列要素を導くた

めにここで用いた方法が，何がしか不器用なものであったことを示唆する．実際，式(4.294)から式(4.298)までと同様の半古典的な方法によれば，より速く式(4.327)を推定できたはずである．すなわち電子1が(Lorentzゲージにおいて)，

$$\Box A_\mu^{(1)} = -ie\sqrt{\left(\frac{m}{E_1'V}\right)\left(\frac{m}{E_1V}\right)}\,\bar{u}_1'\gamma_\mu u_1 e^{i(p_1-p_1')\cdot x} \tag{4.328}$$

を満たすような(‘古典的な’) 4元ポテンシャル $A_\mu^{(1)}$ を生じ，それが電子2と相互作用をすると考えればよい．1931年にC. Møllerが電子-電子相互作用の行列要素を導いた方法は，まさにこのようなものであった．本節で与えた量子電磁力学的な導出方法は，本質的には1932年のH. Bethe and E. Fermiの論文に従うものであるが，ここではエネルギー差の分母の代わりに共変な分母を用いる形式を採用した．

共変な光子の伝播関数　不変な $\mathcal{M}$ 行列(4.327)を，共変性が明白なMaxwell場の量子論を構築することによって，よりエレガントに導くこともできる．式(4.327)を核子間の不変 $\mathcal{M}$ 行列の式(4.293)と比べると，A_μ の横波成分だけでなく，縦波成分と第4成分も量子化することによって，この目的が達せられることを推測できる．付録Aのように A_μ の横波成分だけを動的な場として扱う形式から始めるよりも，むしろ A_μ の4つの成分がすべて“独立でエルミートな”質量がゼロのKlein-Gordon場であり，通常の場の量子化の規則に従うものとする．A_μ を次のように展開する．

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(a_{\mathbf{k}\alpha}\epsilon_\mu^{(\alpha)}e^{ik\cdot x} + a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger\epsilon_\mu^{(\alpha)*}e^{-ik\cdot x}\right) \tag{4.329}$$

ここでは偏極の添字 α が1から4までとなることに注意されたい．偏極ベクトルは次のように選ばれる．

$$\begin{aligned}
&\epsilon^{(1,2)} = \epsilon^{(1,2)*} = (\hat{\mathbf{n}}^{(1,2)}, 0) \quad \text{with} \quad \hat{\mathbf{n}}^{(1,2)} \perp \mathbf{k}, \quad \hat{\mathbf{n}}^{(1)} \perp \hat{\mathbf{n}}^{(2)} \\
&\epsilon^{(3)} = \epsilon^{(3)*} = \left(\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, 0\right) \\
&\epsilon^{(4)} = -\epsilon^{(4)*} = (\mathbf{0}, i)
\end{aligned} \tag{4.330}$$

これらの直交関係は，次のように与えられる．

$$\sum_{\alpha=1}^{4}\epsilon_\mu^{(\alpha)}\epsilon_\mu^{(\alpha)*} = \delta_{\mu\nu} \tag{4.331}$$

生成演算子と消滅演算子は，横波の場と同様に，

$$[a_{\mathbf{k},\alpha}, a_{\mathbf{k}',\alpha'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\alpha\alpha'}, \quad [a_{\mathbf{k},\alpha}, a_{\mathbf{k}',\alpha'}] = [a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger, a_{\mathbf{k}',\alpha'}^\dagger] = 0 \tag{4.332}$$

という交換関係を満たすと仮定する．$a^\dagger_{\mathbf{k},3}$ を縦波光子の生成演算子，$a^\dagger_{\mathbf{k},4}$ を時間的(タイムライク)な光子の生成演算子と呼ぶ．この形式では瞬時の Coulomb 相互作用のことは忘れてよい．電子-電子相互作用は“４種類”の光子——２種類の横波光子と１種類の縦波光子と１種類の時間的(タイムライク)な光子——の交換として可視化して捉えられる．Mϕller 散乱の $\mathcal{M}$ 行列要素を計算するために必要となるのは $\langle 0|T(A_\mu(x)A_\nu(x'))|0\rangle$ の評価である．これは式(4.331) と式(4.332) を用いて容易に実行できる．その結果は，

$$\langle 0|T\big(A_\mu(x)A_\nu(x')\big)|0\rangle = \delta_{\mu\nu}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik\cdot(x-x')}}{i(k^2-i\epsilon)} \tag{4.333}$$

となる[32]．これは“共変な光子の伝播関数”(covariant photon propagator) と呼ばれる．この関数を用いて即座に共変な行列要素(4.327) を書くことができる．したがって共変な結果を得るためには，A_μ の４つの成分すべてが量子化される形式を用いた方が簡単である．

しかしながら前の段落において，我々は２つの要点を見過ごした．第１に，A_μ の４つの成分を運動学的に独立に扱うことで，Lorentz 条件は完全に無視されている．実際には電磁場の源が保存するので，この問題は深刻なものにはならない．第２に，我々は $A_4(x)$ をエルミートな場の演算子と仮定したが，古典電磁力学との対応関係からすると，$A_4(x)$ の期待値は純虚数でなければならない．この困難を克服するために，前段落において行ったような手続きを正当化するための入念な定式化が K. Bleuler(ブロイラー) と S. Gupta(グプタ) によってなされている．Bleuler と Gupta の提案の要点のひとつは，Hilbert 空間におけるスカラー積の定義を，不定計量 (indefinite metric) の概念 (負の確率) を導入して修正しようというものである．その結果として A_4 はエルミートでありながら $\langle A_4\rangle$ は虚数になる．しかし我々は非共変な形式を利用して正しい共変な行列要素(4.327) に到達する方法をすでに学んだので，Bleuler-Gupta の入念な方法について本書では論じない．この形式に関する良質の議論は，他の多くの文献において見いだされる[33]．

いかなる場合でも，４種類の“共変な光子”の交換を表すものとして共変な行列要素(4.327) を視覚化すると便利である．

Coulomb 成分の寄与(4.326) を見ると，瞬時の Coulomb 相互作用は，時間的(タイムライク)な光子と縦波の光子が放射され吸収される過程を“一緒に”考えたものと見ることができ

---

32) 次のように関数 $D_F(x-x')$ を定義している文献を見ることが多い．

$$\frac{1}{2}D_F(x-x') = -\frac{i}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k\,e^{ik\cdot(x-x')}}{(k^2-i\epsilon)} = \lim_{\mu\to 0}\frac{1}{2}\Delta_F(x-x')$$

33) たとえば Mandl (1959), pp.57-71；Källén (1958), pp.181-204 など．

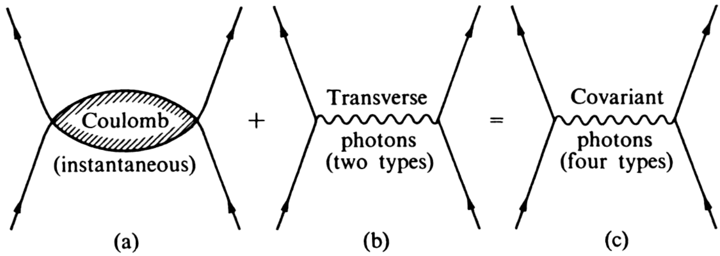


図4.20 “共変な光子”の交換.

る. 2電子間において“4種類”の光子が交換されると考えるならば, 瞬時のCoulomb相互作用のことは完全に忘れてしまってよい. これを図式的に図4.20に示す. これ以降は, 光子という術語を“共変な光子”という意味で用いることにする.

瞬時のCoulomb相互作用と, 時間的(タイムライク)な光子および縦波光子の交換 (一緒に扱う) の等価性は, このように電子-電子相互作用の振幅を e^2 の次数まで扱う特別の問題で成立するだけのものではなく, 電磁場の源が連続の方程式を満たす限りにおいて, 量子電磁力学の如何なる問題においても成立する. したがって, 前に示した $-i\mathcal{M}$ を書くための“規則”(p.279) に, 次の記述を付け加えるのが適当である.

共変な光子の伝播を含む過程では, その光子の伝播部分に,

$$\frac{\delta_{\mu\nu}}{i(q^2 - i\epsilon)} \tag{4.334}$$

を対応させる. また, スピンがゼロの中間子の伝播部分には,

$$\frac{1}{i(q^2 + \mu^2 - i\epsilon)}$$

を充てる.

これらは, スピン$\frac{1}{2}$のフェルミオンの伝播部分に $(-i\gamma\cdot q + m)/[i(q^2 + m^2 + i\epsilon)]$ を充てることと同様の手続きである‡.

我々は“仮想光子”を4種類の偏極状態によって可視化して捉えることを論じてきた. 一方で我々は“実光子”もしくは自由な光子が“2種類”の偏極 (偏光) 状態し

‡(訳註) フェルミオンの伝播関数とボゾンの伝播関数は異なる次元を持つことに注意を促しておく. 座標空間に戻って (式(4.162), 式(4.288), 式(4.314)) 自然単位系で考えると, 前者は (波数)^3, 後者は (波数)^2 の次元を持つ. これはDirac場 ψ_α が (波数)$^{3/2}$ = (体積)$^{-1/2}$ の次元を持ち, ボゾン場 ϕ や電磁場 A_μ が (波数) = (エネルギー) の次元を持つという違いに起因する. 式(4.18)-(4.20) を参照.

か持たないことを知っている．これは一見，理解し難いかも知れない．結局のところ実光子は，仮想光子において $|\mathbf{q}|$ を q_0 に近づけた極限にあたる．物理的な関心の対象となる大抵の実光子も厳密に言えば，あるところで放射され，別のところで吸収されるという意味において (永続的ではない) 仮想的なものである．特定の電子-電子相互作用において，この性質を調べるには，単に $|\mathbf{q}|$ を $|q_0|$ に近づけることを考え，式(4.321) において時間的(タイムライク)な光子の交換を表す第1項が，縦波光子の交換を表す第2項(式(4.325)参照) と相殺し合うことを見ればよい．完全に実光子の条件 $|\mathbf{q}| = |q_0|$ になると，両者は完全に打ち消しあう．したがって次のように言ってもよい．実光子であれ仮想光子であれ，光子は“常に”4通りの偏極状態を備えているが，実光子条件においては時間的(タイムライク)な偏極成分と縦方向の偏極成分が同じ大きさで反対符号の寄与を持ち，その影響が顕在化しない．

Møller 散乱の断面積　Møller 散乱の断面積を計算しよう．微分断面積と $\mathcal{M}$ 行列要素は2光子放射型 e^-e^+ 対消滅の場合と同様にして得ることができる．任意のフェルミオン-フェルミオン散乱について，重心系において一般に，

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rm CM} = \frac{1}{4}\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{(4m_1m_2)^2}{E_{\rm tot}^2}|\mathcal{M}_{fi}|^2 \tag{4.335}$$

が成り立つ．これは，より包括的な2粒子散乱の式(4.182) の特例にあたる．始状態の電子が非偏極で，終状態のスピン状態を観測しないものとすると，始状態と終状態のスピンについて和を取って4で割る必要がある．求めるべき量は，

$$\frac{1}{4}\sum_{s_1}\sum_{s_1'}\sum_{s_2}\sum_{s_2'}|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{ae^4}{(p_1-p_1')^4} + \frac{be^4}{(p_1-p_2')^4} - \frac{ce^4}{(p_1-p_1')^2(p_1-p_2')^2} \tag{4.336}$$

と表される．我々が為すべき作業は a，b，c にあたる部分を計算することである．a は次のように与えられる．

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{4}\sum_{s_1}\sum_{s_1'}\sum_{s_2}\sum_{s_2'}\left(\bar{u}_1\gamma_4\gamma_\nu\gamma_4u_1'\bar{u}_1'\gamma_\mu u_1\right)\left(\bar{u}_2\gamma_4\gamma_\nu\gamma_4u_2'\bar{u}_2'\gamma_\mu u_2\right) \\ &= \frac{1}{4}{\rm Tr}\left[\Lambda^{(e^-)}(\mathbf{p}_1)\gamma_\nu\Lambda^{(e^-)}(\mathbf{p}_1')\gamma_\mu\right]{\rm Tr}\left[\Lambda^{(e^-)}(\mathbf{p}_2)\gamma_\nu\Lambda^{(e^-)}(\mathbf{p}_2')\gamma_\mu\right] \end{aligned} \tag{4.337}$$

ここでは，

$$\Lambda^{(e^-)}(\mathbf{p}_1) = \frac{-i\gamma\cdot p_1 + m}{2m} \tag{4.338}$$

などの略記を用いている．b も式(4.337) に $p_1' \leftrightarrow p_2'$ の入れ換えを施すことで得られる．c については長い対角和(トレース)の計算が必要となる．

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{2}{4}\sum_{s_1}\sum_{s_1'}\sum_{s_2}\sum_{s_2'}(\bar{u}_1'\gamma_\mu u_1)(\bar{u}_2'\gamma_\mu u_2)(\bar{u}_2\gamma_\nu u_1')(\bar{u}_1\gamma_\nu u_2') \\
&= \frac{1}{2}\sum_{s_1}\sum_{s_1'}\sum_{s_2}\sum_{s_2'}(\bar{u}_2'\gamma_\mu u_2)(\bar{u}_2\gamma_\nu u_1')(\bar{u}_1'\gamma_\mu u_1)(\bar{u}_1\gamma_\nu u_2') \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Big[\Lambda^{(e^-)}(\mathbf{p}_2')\gamma_\mu\Lambda^{(e^-)}(\mathbf{p}_2)\gamma_\nu\Lambda^{(e^-)}(\mathbf{p}_1')\gamma_\mu\Lambda^{(e^-)}(\mathbf{p}_1)\gamma_\nu\Big] \qquad (4.339)
\end{aligned}
$$

式(4.337) は，公式(4.80) や，これを一般化した次の公式 (容易に証明できる)，

$$
\mathrm{Tr}\Big[(\gamma{\cdot}a)(\gamma{\cdot}b)(\gamma{\cdot}c)(\gamma{\cdot}d)\Big] = 4\Big[(a{\cdot}b)(c{\cdot}d) - (a{\cdot}c)(b{\cdot}d) + (a{\cdot}d)(b{\cdot}c)\Big] \qquad (4.340)
$$

を利用して計算する[§]．式(4.339) は一層，手に負えないように見えるが，次の公式を利用すれば，それほど大変ではない．

$$
\begin{aligned}
&\gamma_\mu(\gamma{\cdot}a)\gamma_\mu = -2\gamma{\cdot}a \\
&\gamma_\mu(\gamma{\cdot}a)(\gamma{\cdot}b)\gamma_\mu = 2\Big[(\gamma{\cdot}a)(\gamma{\cdot}b) + (\gamma{\cdot}b)(\gamma{\cdot}a)\Big] = 4a{\cdot}b \\
&\gamma_\mu(\gamma{\cdot}a)(\gamma{\cdot}b)(\gamma{\cdot}c)\gamma_\mu = -2(\gamma{\cdot}c)(\gamma{\cdot}b)(\gamma{\cdot}a) \qquad (4.341)
\end{aligned}
$$

上式では添字 μ に関する和を取る．これらの公式をガンマ行列の基本的な反交換関係から証明することは難しくない．たとえば式(4.341) の第２式の証明は，次のようになされる．

$$
\begin{aligned}
\gamma_\mu(\gamma_\nu a_\nu)(\gamma_\lambda b_\lambda)\gamma_\mu &= \Big[-(\gamma_\nu a_\nu)\gamma_\mu + 2a_\mu\Big]\gamma_\lambda b_\lambda\gamma_\mu \\
&= -(\gamma{\cdot}a)(-\gamma_\lambda b_\lambda\gamma_\mu + 2b_\mu)\gamma_\mu + 2(\gamma{\cdot}b)(\gamma{\cdot}a) \\
&= 2\Big[(\gamma{\cdot}a)(\gamma{\cdot}b) + (\gamma{\cdot}b)(\gamma{\cdot}a)\Big] \\
&= 4a{\cdot}b \qquad (4.342)
\end{aligned}
$$

上式では $\gamma_\mu\gamma_\mu = 4$ (μ について和を取る) を用いた．ここで，この対角和(トレース)の計算の詳述はしないが，読者は問題4-13 (p.381) において，電子-陽電子散乱に関する類似の式を扱うことになる．正味の結果として式(4.336) の a，b，c を，次の３つの Lorentz 不変なスカラー積によって表すことができる．

$$
\begin{aligned}
&p_1{\cdot}p_2 = p_1'{\cdot}p_2' \\
&p_1{\cdot}p_1' = p_2{\cdot}p_2' \\
&p_1{\cdot}p_2' = p_2{\cdot}p_1' \qquad (4.343)
\end{aligned}
$$

[§](訳註) 式(4.337) に現れる単独の γ_ν などは，たとえば $e_{(\nu)}$ を $e_{(1)} = (1,0,0,0), \ldots, e_{(4)} = (0,0,0,1)$ のように定義して $\gamma_\nu = \gamma{\cdot}e_{(\nu)}$ と考えれば式(4.340) を適用できる因子と見なせる．

これらの３つのスカラー積のうち，独立に選べるのは２つである．それぞれのスカラー積に関係した３つの変量を，

$$
\begin{aligned}
s &= -(p_1+p_2)^2 = -(p_1'+p_2')^2 = 2m^2 - 2p_1\cdot p_2 \\
t &= -(p_1-p_1')^2 = -(p_2'-p_2)^2 = 2m^2 + 2p_1\cdot p_1' \\
u &= -(p_1-p_2')^2 = -(p_1'-p_2)^2 = 2m^2 + 2p_1\cdot p_2'
\end{aligned} \tag{4.344}
$$

のように定義すると，これらは次の関係を満たす[34]．

$$
s+t+u = 4m^2 \tag{4.345}
$$

重心系において式(4.345)の証明を考える．重心系では $E=E_1=E_1'=E_2=E_2'$，$\mathbf{p}=\mathbf{p}_2=-\mathbf{p}_1$，$\mathbf{p}'=\mathbf{p}_2'=-\mathbf{p}_1'$，$|\mathbf{p}|=|\mathbf{p}'|$ である．したがって，

$$
\begin{aligned}
(p_1+p_2)^2 &= -E_{\text{tot}}^2 = -(2E)^2 = -4(|\mathbf{p}|^2+m^2) \\
(p_1-p_1')^2 &= |\mathbf{p}-\mathbf{p}'|^2 = 2|\mathbf{p}|^2(1-\cos\theta) \\
(p_1-p_2')^2 &= |\mathbf{p}+\mathbf{p}'|^2 = 2|\mathbf{p}|^2(1+\cos\theta)
\end{aligned} \tag{4.346}
$$

となり，式(4.345)が成立することが分かる．s，t，u は不変なスカラーなので，重心系において成立する式(4.345)は“任意の”座標系において成立する．

式(4.337)と式(4.345)の対角和（トレース）を計算しなくても，非相対論的な極限におけるMøller散乱の微分断面積を即座に書くことができる．非相対論極限 $(\mathbf{p}=\mathbf{p}'\approx 0)$ では $\bar{u}_1'\gamma_k u_1\approx 0$ で，$s_1=s_1'$ ならば $\bar{u}_1'\gamma_4 u_1\approx 1$，$s_1\neq s_1'$ ならば $\bar{u}_1'\gamma_4 u_1\approx 0$ である．式(4.327)，式(4.335)，式(4.346)を用いると，スピンを平均化した断面積が次式のように与えられる．

$$
\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}\right)_{\text{CM}} \overset{\text{NR}}{=} \frac{r_0^2}{16\beta^4}\left[\frac{1}{\sin^4(\theta/2)}+\frac{1}{\cos^4(\theta/2)}-\frac{1}{\sin^2(\theta/2)\cos^2(\theta/2)}\right] \tag{4.347}
$$

β は c を単位とする電子の速度（相対速度ではなく一方の電子の速度）である．式(4.347)の第１項がRutherford項にあたることは明らかである．第２項は同種粒子同士の弾性散乱の性質として，式全体が $\theta\to\pi-\theta$ に関して対称でなければならないという要請から必要とされる．第３項は直接散乱と交換散乱の干渉に起因する項であり，Pauli原理の効果によって $\theta\approx\pi/2$ の断面積を低下させている．２つの非相対論的な電子間の正確な散乱の式は，上記の摂動論に基づく式の第３項に $\cos\{(\alpha/2\beta)\log[\tan^2(\theta/2)]\}$ を

[34] これらの変数 s，t，u は，S. Mandelstam（マンデルシュタム）に因んでMandelstam変数と呼ばれることがある．彼は中間子-核子散乱振幅の，変数 $-(p_\pi+p_{\rm N})^2$，$-(p_\pi-p_\pi')^2$，$-(p_\pi-p_{\rm N}')^2$ の関数としての解析的性質を研究した．

掛けた形になることを付言しておく．極端な相対論極限 (extreme relativistic limit) における Møller 散乱の断面積も比較的容易に得られる．式(4.337) と式(4.339) の対角和(トレース)を計算する際に $\Lambda^{(e^-)}(\mathbf{p}_1)$ などを $-i\gamma{\cdot}p_1/2m$ などに置き換えると，次の結果が得られる．

$$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} \overset{\mathrm{ER}}{=} \frac{r_0^2}{8}\left(\frac{m}{E}\right)^2\left[\frac{1+\cos^4(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)}+\frac{1+\sin^4(\theta/2)}{\cos^4(\theta/2)}+\frac{2}{\sin^2(\theta/2)\cos^2(\theta/2)}\right] \tag{4.348}$$

電子間の有効ポテンシャル；Breit 相互作用　非相対論的な波動力学では (古典力学と同様に)，基本となる Schrödinger 方程式にポテンシャルの概念を導入してある．これに対して，相対論的な場の理論では相互作用を“量子の交換”という概念によって捉えている．これらの２つの概念の関係を問うのは自然なことであろう．最低次の過程に限定して考えれば，ゆっくりと移動する粒子に関してそのような関係を確立することは難しくない．Schrödinger 理論における Born 近似によれば，粒子１ (質量 m_1) と粒子２ (質量 m_2) の弾性散乱の微分断面積は，自然単位系で次のように与えられる[35)]．

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} = \left|\frac{m_{\mathrm{red}}}{2\pi}\int e^{-i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}}V(\mathbf{x})e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}d^3x\right|^2 \tag{4.349}$$

m_{red} は換算質量 (reduced mass) を表す．

$$m_{\mathrm{red}} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \tag{4.350}$$

$\mathbf{p}$ と $\mathbf{p}'$ はそれぞれ，一方の粒子 (たとえば粒子２) の重心系における始状態と終状態の運動量である．この形式を，粒子がスピンを持ち，ポテンシャルが運動量 $(-i\nabla)$ とスピンに依存するように一般化することは容易である．式(4.335) に戻ると，共変な行列要素 $\mathcal{M}_{fi}$ は非相対論的な断面積と次のように関係することが分かる．

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} \overset{\mathrm{NR}}{=} \left|\left(\frac{1}{4\pi}\right)\left(\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}\right)\mathcal{M}_{fi}\right|^2 \tag{4.351}$$

式(4.349) と式(4.351) を比較すると，次の関係が得られる．

$$\mathcal{M}_{fi} = \int V e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}d^3x \tag{4.352}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}_1' - \mathbf{p} \tag{4.353}$$

35) たとえば Dicke and Wittke (1960), pp.293-295 ; Merzbacher (1961), pp.226-227.

ここでは式(4.352) の位相を，斥力 (正のポテンシャル) が正の $\mathcal{M}_{fi}$ に対応するように選んである．これは共変な行列要素の定義(4.292) に整合している．式(4.38) と式(4.39) も参照しておいてもらいたい．式(4.352) を Fourier 変換すると，

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathcal{M}_{fi} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} d^3q \tag{4.354}$$

を得る．したがって共変な行列要素の非相対論極限が分かれば，この式に基づいて，Schrödinger 方程式で用いることができるような，実効的な３次元ポテンシャルを構築することができる．要点は，いわゆるポテンシャルというものが，最低次の $\mathcal{M}$ 行列要素の３次元 Fourier 変換にほかならないことである[36]．２つの同種フェルミオンの散乱問題の場合，式(4.354) に現れる $\mathcal{M}$ 行列要素は，共変な行列要素において直接散乱部分に対応する．非相対論的な波動力学においては，反対称な波動関数を用いることによって，自動的に交換散乱の寄与までが考慮されるからである．

式(4.354) として示した規則が，Møller 散乱の場合にどのように成立しているかを見てみよう．重心系において式(4.327) の直接項は次のように簡約される．

$$\mathcal{M}_{fi}^{(\mathrm{direct})} = \frac{e^2(\bar{u}'_1\gamma_4 u_1)(\bar{u}'_2\gamma_4 u_2)}{|\mathbf{q}|^2} + \frac{e^2(\bar{u}'_1\boldsymbol{\gamma} u_1)\cdot(\bar{u}'_2\boldsymbol{\gamma} u_2)}{|\mathbf{q}|^2} \tag{4.355}$$

低エネルギーの極限において $\bar{u}_1\gamma_4 u_1$ が $\delta_{s_1 s'_1}$ に置き換わり，$\bar{u}'_1\boldsymbol{\gamma} u_1$ がゼロになる．$\bar{u}_2\gamma_\mu u_2$ についても同様である．式(4.355) を式(4.354) に代入すると，予想される通りに斥力の Coulomb ポテンシャル $e^2/(4\pi r)$ が与えられる．速度 β が相対論的に無視できないときに重要となる式(4.355) の第２項を調べるために，まず次の関係を確認する (式(3.215)参照)．

$$\bar{u}'_1\boldsymbol{\gamma} u_1 = \chi^{(s'_1)\dagger}\left[-\frac{i(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}'_1)}{2m} + \frac{\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\times(\mathbf{p}'_1-\mathbf{p}_1)}{2m}\right]\chi^{(s_1)} \tag{4.356}$$

このベクトルは $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1$ の方向に成分を持たないという意味において“横方向”である．式(4.356) の第１項と第２項がそれぞれ“電流”と“(磁気) 双極子”に対応することを思い出すと，式(4.355) の第２項が電流-電流相互作用，双極子-双極子相互作用，電流-双極子相互作用を生じることが分かる．例として双極子-双極子相互作用を詳しく考察してみよう．$\mathbf{q} = \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}_1$ なので，双極子-双極子行列を次のように Fourier 展開できる．

---

[36] しかし高次の過程では，より低次のポテンシャルによる相互作用もまた高次の行列要素を与えるので，より注意深い考察が必要となる．

$$-\frac{e^2}{(2\pi)^3}\int\frac{(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\times\mathbf{q})\cdot(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\times\mathbf{q})e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{(2m)^2|\mathbf{q}|^2}d^3q$$
$$=\left(\frac{e}{2m}\right)^2(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\times\nabla)\cdot(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\times\nabla)\left(\frac{1}{4\pi r}\right)$$
$$=-\frac{e\boldsymbol{\sigma}^{(1)}}{2m}\cdot\nabla\times\left[\frac{e\boldsymbol{\sigma}^{(2)}}{2m}\times\nabla\left(\frac{1}{4\pi r}\right)\right] \tag{4.357}$$

最後に現れた $\left[(e\boldsymbol{\sigma}^{(2)}/2m)\times\nabla(1/4\pi r)\right]$ は，電子２の磁気能率によって生じたベクトルポテンシャルである．したがって式(4.357) は，古典的な考察から予想される電子間の磁気能率相互作用そのものである[37]．電流-双極子相互作用では $[\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\times(\mathbf{p}_1'-\mathbf{p}_1)]\cdot(\mathbf{p}_2+\mathbf{p}_2')$ のような因子が生じるので，次の恒等式 (任意の球対称ポテンシャル V について成立する) を用いる．

$$\int e^{-i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\boldsymbol{\sigma}\cdot\left[\mathbf{x}\times(-i\nabla)\right]e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}d^3x=-i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{p}')\int Ve^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}d^3x \tag{4.358}$$

ここからはスピン-軌道相互作用が導かれる (p.381, 問題4-14)．この方法で得たスピン-軌道ポテンシャルを，3.3節において論じた Thomas によるスピン-軌道ポテンシャルの概念と混同してはならない．Thomas相互作用は式(4.355) の“第１項”に含まれている．このことは，次の関係を用いて証明される．

$$(\bar{u}_1'\gamma_4u_1)\approx\chi^{(s_1')\dagger}\left[1+\frac{\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_1'}{(2m)^2}+\frac{i\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot(\mathbf{p}_1'\times\mathbf{p}_1)}{(2m)^2}\right]\chi^{(s_1)} \tag{4.359}$$

結果的に２電子間のスピン-軌道相互作用は，Thomas相互作用よりも“３倍”強いものになる．

$$V^{(L-S)}=-\frac{3}{2m^2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{e^2}{4\pi r}\right)\mathbf{L}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}^{(1)}+\boldsymbol{\sigma}^{(2)}}{2}\right) \tag{4.360}$$

Møller の仕事に先立って，G. Breit(ブライト)は，基本的には古典的な議論によって Coulomb ポテンシャルに対するこれらの補正項をすべて導き，He原子の問題に応用していた．したがって，これらの補正項は２電子間の Breit相互作用として知られている．

Bhabha散乱 (電子-陽電子散乱)；ポジトロニウム Møller散乱の振幅を詳しく調べた結果を踏まえて，電子-陽電子散乱，すなわちBhabha(バーバ)散乱 (1935年にこの問題を扱った H. J. Bhabha に因んでこのように呼ばれる) の振幅を直ちに得ることができる．e^2 の次数までで，寄与を持つことのできる電子-陽電子演算子積は，以下のものである．

[37] 3.8節に与えた水素原子の超微細構造の議論を，再度見てもらいたい (特に式(3.327))．

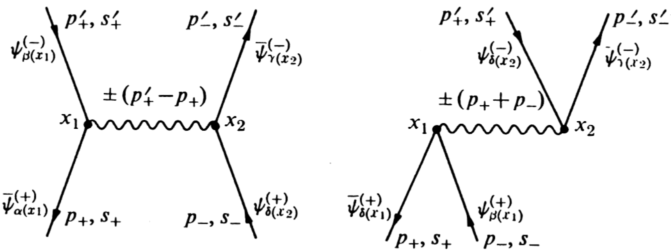


図4.21 Bhabha (バーバ) 散乱. (a) 直接散乱. (b) 消滅散乱.

$$
\begin{aligned}
&\bar{\psi}^{(+)}_\alpha(x_1)\psi^{(-)}_\beta(x_1)\bar{\psi}^{(-)}_\gamma(x_2)\psi^{(+)}_\delta(x_2),\\
&\bar{\psi}^{(-)}_\alpha(x_1)\psi^{(+)}_\beta(x_1)\bar{\psi}^{(+)}_\gamma(x_2)\psi^{(-)}_\delta(x_2) \underset{x_1\leftrightarrow x_2}{\overset{\alpha\beta\leftrightarrow\gamma\delta}{\longleftrightarrow}} \bar{\psi}^{(-)}_\gamma(x_2)\psi^{(+)}_\delta(x_2)\bar{\psi}^{(+)}_\alpha(x_1)\psi^{(-)}_\beta(x_1),\\
&\bar{\psi}^{(+)}_\alpha(x_1)\psi^{(+)}_\beta(x_1)\bar{\psi}^{(-)}_\gamma(x_2)\psi^{(-)}_\delta(x_2),\\
&\bar{\psi}^{(-)}_\alpha(x_1)\psi^{(-)}_\beta(x_1)\bar{\psi}^{(+)}_\gamma(x_2)\psi^{(+)}_\delta(x_2) \underset{x_1\leftrightarrow x_2}{\overset{\alpha\beta\leftrightarrow\gamma\delta}{\longleftrightarrow}} \bar{\psi}^{(-)}_\gamma(x_2)\psi^{(-)}_\delta(x_2)\bar{\psi}^{(+)}_\alpha(x_1)\psi^{(+)}_\beta(x_1)
\end{aligned}
\tag{4.361}
$$

1行目と2行目に挙げた項は，図4.21(a) のフェルミオン線を与える (ここでも2行目の項に対しては変数の入れ換え $x_1 \leftrightarrow x_2$ と Dirac添字の入れ換えを施して1行目の項と類似の形にしている). 3行目と4行目に挙げた項は，いささか目新しいものである．たとえば3行目の後ろ側の $\bar{\psi}^{(-)}_\gamma(x_2)\psi^{(-)}_\delta(x_2)$ を見てみよう．この演算子の対(つい)は時空点 x_2 において電子-陽電子対を生成する．同様に $\bar{\psi}^{(+)}_\alpha(x_1)\psi^{(+)}_\beta(x_1)$ は x_1 において電子-陽電子対を消滅させる．このように3行目と4行目の項は図4.21(b) のようなフェルミオン線を構成するが，これは“消滅散乱ダイヤグラム”(annihilation diagram) と呼ばれる．共変な光子の伝播関数が Diracスピノルの積を結びつける仕組みは図4.21 の (a) も (b) も Møller散乱の場合と同じであるが，注意を要する点は，各ダイヤグラムの符号である．まず1行目の項を，消滅 (生成) 演算子が右側 (左側) になるように書き換えよう．この散乱過程に寄与を持たない項を除くと，1行目の項は単に次のようになる．

$$
\psi^{(-)}_\beta(x_1)\bar{\psi}^{(-)}_\gamma(x_2)\bar{\psi}^{(+)}_\alpha(x_1)\psi^{(+)}_\delta(x_2) \tag{4.362}
$$

これを始状態 $b^{(s_-)\dagger}(\mathbf{p}_-)d^{(s_+)\dagger}(\mathbf{p}_+)|0\rangle$ と終状態 $b^{(s'_-)\dagger}(\mathbf{p}'_-)d^{(s'_+)\dagger}(\mathbf{p}'_+)|0\rangle$ で挟むこ

とになるが,

$$\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1)\psi_\delta^{(+)}(x_2)b^{(s_-)\dagger}(\mathbf{p}_-)d^{(s'_+)\dagger}(\mathbf{p}_+)|0\rangle$$
$$= \sqrt{\left(\frac{m}{E_+V}\right)\left(\frac{m}{E_-V}\right)}\bar{v}_\alpha u_\delta \exp(ip_-{\cdot}x_2 + ip_+{\cdot}x_1)|0\rangle$$
$$\langle 0|d^{(s'_+)}(\mathbf{p}'_+)b^{(s'_-)}(\mathbf{p}'_-)\psi_\beta^{(-)}(x_1)\bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2)$$
$$= -\sqrt{\left(\frac{m}{E'_+V}\right)\left(\frac{m}{E'_-V}\right)}v'_\beta \bar{u}'_\gamma \exp(-ip'_-{\cdot}x_2 - ip'_+{\cdot}x_1)\langle 0| \tag{4.363}$$

である．u_δ，$\bar{u}'_\gamma$ などは，それぞれ $u_\delta^{(s_-)}(\mathbf{p}_-)$，$\bar{u}_\gamma^{(s'_-)}(\mathbf{p}'_-)$ などを表す．したがって図4.21(a) には“負号”を与えなければならない．式(4.361) の3行目は，1行目と奇数回の置換の違いがあるので，図4.21(b) の消滅散乱ダイヤグラムには“正号”が付く．結果として Bhabha散乱の $\mathcal{M}$ 行列要素は次のように書かれる．

$$-i\mathcal{M}_{fi} = (-e)^2\left[-\frac{(\bar{v}'\gamma_\mu v)(\bar{u}'\gamma_\mu u)}{i[(p_+ - p'_+)^2 - i\epsilon]} + \frac{(\bar{u}'\gamma_\mu v)(\bar{v}'\gamma_\mu u)}{i[(p_+ + p'_-)^2 - i\epsilon]}\right] \tag{4.364}$$

図4.21 を Mϕller散乱のダイヤグラムと比較すると (あるいは式(4.364) を式(4.327) と比較すると)，次のような簡単な置き換えによって，Mϕller散乱と Bhabha散乱が (全体に掛かる負号だけを除いて) 対応することが分かる．

$$p_1 \to -p'_+, \quad p'_1 \to -p_+$$
$$p_2 \to p_-, \quad p'_2 \to p'_- \tag{4.365}$$

この観点からすると，Bhabha散乱の消滅散乱ダイヤグラムは，Mϕller散乱の交換散乱ダイヤグラムに対応している†．実際に空孔理論の記述によれば，図4.21(b) における消滅散乱の機構は，入射電子が Diracの海の中にある負エネルギー電子と交換散乱をする過程に対応している．したがって直接散乱と消滅散乱について，相対的に負号が必要となることが予想される．ここでも第二量子化した Dirac理論の下で，自動的に正しい符号因子が現れている．

式(4.354) を用いて，式(4.364) の2つの項それぞれに対応するポテンシャルを導くことができる．非相対論的な極限を考えて $\mathbf{p}_+ = \mathbf{p}_- = \mathbf{p}'_+ = \mathbf{p}'_- = \mathbf{0}$ と置くと $\bar{v}'\gamma_4 v = \delta_{s_+s'_+}$，$\bar{u}'\gamma_4 u = \delta_{s_-s'_-}$，$\bar{v}'\boldsymbol{\gamma}v = \bar{u}'\boldsymbol{\gamma}u = \mathbf{0}$ なので，第1項が Coulomb ポテンシャルを与えることは明らかである．共変な $\mathcal{M}$ 行列要素が負なので，この

†(訳註) 図4.19 (p.319) のダイヤグラム (伝播関数の式だけを置き換えれば Mϕller散乱を表す) において p_1 と p'_1 の結節点に対する上下方向を反対に変更してみれば，Bhabha散乱の図4.21 との対応関係を理解できる．それぞれ (a) は p_1 (p'_+) と p'_1 (p_+) が同じ結節点に接続しており (直接散乱)，(b) は異なる結節点に接続している (交換散乱もしくは消滅散乱)．

Coulomb ポテンシャルは引力となるが，もちろんこのことは e^- と e^+ が互いに引き合うことから予想される通りである．第 2 項に対応するポテンシャルは更に興味深い．読者は問題4-15 (p.381) において，この消滅散乱項が短距離 ($\delta^{(3)}$型) の斥力ポテンシャルを生じ，^3S 状態に影響を及ぼすことを見ることになる．

ここで，始状態と終状態を表す平面波状態の間の行列要素を，如何にして束縛状態の問題に応用し得るかという問題について簡単に言及しておく．摂動論を直接に束縛状態のエネルギーの計算に適用できないことは明らかである．しかし，まず比較的簡単なポテンシャル (たとえば Coulomb ポテンシャル) を採用して Schrödinger 方程式 (もしくは Dirac 方程式) を解くことによって，近似的な束縛エネルギーを得る．それから通常の摂動論の方法を用いて真のポテンシャル (全ポテンシャル) による相互作用と，既に考察した相互作用との違いを推定する[38]．この方法のポジトロニウムの問題への応用を考えてみよう．まず通常の Coulomb ポテンシャルを採用して Schrödinger 方程式 (もしくは 1 粒子に関する Dirac 方程式) を解いて，近似的なエネルギー準位を求める．Coulomb 波動関数とそれらのエネルギー準位を得たら，そこから最初の $-e^2/(4\pi r)$ を用いた Schrödinger 方程式では考慮されていない双極子-双極子相互作用や消滅散乱相互作用などの影響を推定する．この方法により，ポジトロニウムの基底状態の超微細分裂が得られる[39](p.381, 問題4-15).

$$E(n=1,{}^3S)-E(n=1,{}^1S)=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\alpha^2 Ry_\infty \tag{4.366}$$

これは数値的には 8.2×10^{-4} eV である．Ry_∞ は通例に従い $(\alpha^2/2)m$ を表す．$\frac{2}{3}$ は図4.21(a) に含まれる双極子-双極子相互作用によって生じ，$\frac{1}{2}$ は図4.21(b) で表される消滅散乱に起因する斥力 (^3S 状態だけに作用する) から生じている．付言しておくならば，さらに異常磁気能率や 2 つの仮想光子を含む消滅散乱などの高次の過程の補正までを考慮すると，上記の超微細分裂の式は若干修正される．

$$E(n=1,{}^3S)-E(n=1,{}^1S)=\alpha^2 Ry_\infty\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{\pi}\left(\log 2+\frac{16}{9}\right)\right] \tag{4.367}$$

この結果は R. Karplus and A. Klein によって示された．式(4.367) によれば $^3S-{}^1S$ 間のエネルギー差にに対応するマイクロ波の周波数は 2.0337×10^5 MHz である．この理論値は M. Deutsch とその共同研究者が得た実験値 $(2.0338\pm0.0004)\times10^5$ MHz

[38] 同じ結果を導くための，これに代わる更に定式的な方法は，“ 束縛相互作用表示 ” (bound interaction representation) と呼ばれる．たとえば Jauch and Rohrlich (1955), pp.306-321 を参照されたい．

[39] 水素原子の超微細分裂は，微細構造分裂に比べて (m_e/m_p) 程度に小さいが (式(3.328)参照)，ポジトロニウムでは超微細分裂と微細構造分裂が同じオーダーになる．この理由でポジトロニウムにおける超微細分裂は単に微細構造分裂と呼ばれることがしばしばある．

と極めてよく一致している．ポジトロニウムの超微細分裂を正確に得るためには，$\alpha^3 Ry_\infty$ の次数の小さな補正を措くにしても，式4.21(b) の消滅散乱 (水素原子には類似の過程が存在しない) を考慮する必要があることは明白である．消滅散乱過程の影響は，$p^{(\mathrm{Lab})} \sim 3m$ の Bhabha 散乱実験でも確認された．

中間子交換ポテンシャル 式(4.354) を中間子論に適用して，いわゆる 1-中間子交換ポテンシャルを導くこともできる．スカラー結合の場合を考えると，共変な行列要素 (4.293) の Fourier 変換の第 1 項からは，1.3節において古典的に得た有名な湯川ポテンシャル，

$$V^{(\mathrm{S})} = -\frac{G^2}{4\pi}\frac{e^{-\mu r}}{r} \tag{4.368}$$

が得られる (添字 (S) はスカラー結合を意味する)．Coulomb 力の場合と異なり，スカラー中間子の交換による 2 つの核子間の力は“引力”になることに注意してもらいたい．

実験的には，核子の間で交換される最も軽い中間子は“擬スカラー π 中間子”であることが知られている．スカラー結合の代わりに“擬スカラー(擬スカラー)結合”，

$$\mathcal{H}_{\mathrm{int}} = iG\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi \tag{4.369}$$

を採用すると，共変な行列要素の直接散乱部分について，次式を得る．

$$-i\mathcal{M}_{fi}^{(\mathrm{dir})} = \frac{G^2(\bar{u}_1'\gamma_5 u_1)(\bar{u}_2'\gamma_5 u_2)}{i[(p_1 - p_1')^2 + \mu^2]} \tag{4.370}$$

上式を Møller 散乱の式と比べると，交換されるボゾンの質量が有限であることを除けば，必要な変更は $-e\gamma_\mu \to G\gamma_5$ だけである．非相対論的な極限では，分子にある各因子が次のようになる．

$$\begin{aligned}\bar{u}_1'\gamma_5 u_1 &= \left(\chi^{(s_1')\dagger},\ -\chi^{(s_1')\dagger}\frac{\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\mathbf{p}_1'}{2m}\right)\begin{pmatrix}0 & -I\\ -I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi^{(s_1)}\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\mathbf{p}_1}{2m}\chi^{(s_1)}\end{pmatrix}\\ &= -\chi^{(s_1')\dagger}\frac{\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\mathbf{q}}{2m}\chi^{(s_1)}\end{aligned} \tag{4.371}$$

$$\bar{u}_2'\gamma_5 u_2 = \chi^{(s_2')\dagger}\frac{\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\cdot\mathbf{q}}{2m}\chi^{(s_2)} \tag{4.372}$$

したがって，式(4.370) は，次のように近似される．

$$\mathcal{M}_{fi}^{(\mathrm{dir})} \overset{\mathrm{NR}}{=} -\frac{G^2(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\cdot\mathbf{q})}{(2m)^2\left(|\mathbf{q}|^2 + \mu^2\right)} \tag{4.373}$$

m は核子の質量，μ は中間子の質量である[40)]．この場合の有効ポテンシャルは次式で与えられる (添字 (PS) は擬スカラー結合を意味する)．

$$V^{(\mathrm{PS})} = \frac{G^2}{4\pi}\frac{1}{(2m)^2}(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\nabla)(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\cdot\nabla)\frac{e^{-\mu r}}{r} \tag{4.374}$$

直接の微分計算によって，$r \neq 0$ において式(4.374) を次のように書き直せる．

$$V^{(\mathrm{PS})} = \frac{G^2}{4\pi}\left(\frac{\mu}{2m}\right)^2\left\{(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(2)}) + \left[\frac{1}{(\mu r)^2} + \frac{1}{\mu r} + \frac{1}{3}\right]S_{12}\right\}\frac{e^{-\mu r}}{r} \tag{4.375}$$

上式の S_{12} は，よく知られているテンソル演算子である[41)]．

$$S_{12} = \frac{3(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\mathbf{x})(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\cdot\mathbf{x})}{r^2} - \boldsymbol{\sigma}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(2)} \tag{4.376}$$

ポテンシャル(4.375) は中性擬スカラー中間子の交換，たとえば π^0 の交換による p-p (もしくは n-n) 相互作用の記述に適している．しかし p-n 相互作用の場合には，中性子 (陽子) が π^- (π^+) を放出して陽子 (中性子) になり，相手の陽子 (中性子) が π^- (π^+) を吸収して中性子 (陽子) になるという過程も考慮しなければならない．原子核物理における荷電独立性の原理により，たとえば $\mathrm{n} \leftrightarrow \mathrm{p} + \pi^-$ の結合定数は，$\mathrm{p} \leftrightarrow \mathrm{p} + \pi^0$ の結合定数と，単純な数値因子によって関係づけられるはずである．大抵の高エネルギー核物理の教科書において論じられているように，荷電独立性に整合する中間子-核子相互作用を，次のように表すことが考えられる．

$$\mathcal{H}_{\mathrm{int}} = iG\left[\sqrt{2}\phi_{\mathrm{ch}}\bar{\psi}_{\mathrm{n}}\gamma_5\psi_{\mathrm{p}} + \sqrt{2}\phi_{\mathrm{ch}}^{\dagger}\bar{\psi}_{\mathrm{p}}\gamma_5\psi_{\mathrm{n}} + \phi_3\left(\bar{\psi}_{\mathrm{p}}\gamma_5\psi_{\mathrm{p}} - \bar{\psi}_{\mathrm{n}}\gamma_5\psi_{\mathrm{n}}\right)\right] \tag{4.377}$$

ϕ_3，ϕ_{ch}，$\phi_{\mathrm{ch}}^{\dagger}$ はそれぞれ π^0，π^-，π^+ の場の演算子である (たとえば ϕ_{ch} は π^- を消滅させ，π^+ を生成する)[42)]．式(4.377) を用いて 1-中間子交換相互作用を計算す

---

40) “擬スカラー(擬スカラー)結合”の代わりに“擬スカラー(擬ベクトル)結合”の，

$$\mathcal{H}_{\mathrm{int}} = \frac{iF}{\mu}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi\frac{\partial}{\partial x_\mu}\phi$$

を考えてもよい．1-中間子相互作用に関する限り，結果は式(4.373) と同じ形になる．$(G^2/4\pi) \to (F^2/4\pi)(2m/\mu)^2$ の置き換えを施せばよい．

41) 種々の対称操作から，S_{12} は 2 核子系の全角運動量，パリティ，スピン-波動関数を変えずに相対的な軌道角運動量を変更することができるものと推測される．したがって，たとえば $^3S_1$ 状態を $^3D_1$ 状態に結びつける．Blatt and Weisskopf (1952), pp.96-108 ; Preston (1952), pp.77-83 などを参照．(以下訳註) 同種フェルミオン配置項が $^{(2S+1)}L_J$ という形式で表記される．J は全角運動量量子数，S は全スピン量子数，$L = S, P, D, \ldots$ は全軌道角運動量量子数 $0, 1, 2, \ldots$ を表す記号である．

42) たとえば Nishijima (1964), pp.75-89 ; Sakurai (1964), pp.197-222 を参照．

ると，式(4.375) に次のアイソスピン因子が掛かったポテンシャルが得られる (1938年に N. Kemmer（ケンマー）が導いた).

$$\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)} = \begin{cases} 1 & \text{for } T=1 \\ -3 & \text{for } T=0 \end{cases} \tag{4.378}$$

T は2核子系の全アイソスピンを表す‡. ^1S, ^3P, ^1D などについては $T=1$ であり，^3S, ^1P, ^3D などについては $T=0$ である (これは p-p や n-n では実現しない).

この後すぐに見るように，式(4.377) に現れる相互作用定数 G は大きい値を持つので，中間子論において摂動論に頼った議論は一般に実りの多いものにはならない. しかしながら我々が導出した1-中間子交換ポテンシャルは，衝突径数 (impact parameter) の大きい2核子衝突を考察する場合，あるいは等価的に核子-核子散乱行列における l の高い部分波の振幅を考察する場合には役に立つ. その理由は，核子間距離が $1/\mu \approx 1.4\times 10^{-13}$ cm に比べて充分に遠ければ，多数の中間子が交換される過程が重要にならないからである. 極言すると，これは不確定性原理からの直接的な帰結である. 不確定性原理によれば，エネルギー保存を破るような質量 M の粒子の放出と再吸収が有意の確率で起こり得る時間は $1/M$ 程度以下に限られるので，ポテンシャルが及ぶ距離も $1/M$ のオーダーになる (もう少し定量的に考察すると，2-中間子交換や3-中間子交換によるポテンシャルは遠距離において $e^{-2\mu r}/r$, $e^{-3\mu r}/r$ のように減衰する). 言い換えると核子-核子ポテンシャルの裾（すそ） (外側) の部分は1-中間子交換ポテンシャルによって正確に与えられるものと推測される. この点は M. Taketani (武谷三男) たちによって強調された. 一方，障壁は球対称なので，高 l 波はポテンシャルの裾の部分だけに対して敏感である. したがって核子-核子散乱の高い l の成分だけの位相ずれから中間子-核子結合定数 G を見積もることができるが，これは M. J. Moravcsik とその共同研究者によって実際に調べられた. 推定された結合定数の数値は，

$$\frac{G^2}{4\pi} \approx 14 \tag{4.379}$$

である. この値は全く別の方法，たとえば中間子-核子散乱の分散関係に基づく推定

‡(訳註) アイソスピン (isospin) は，元々は同重体スピン (isobaric spin) という意味である (isotopic spin という言い方もあるが必ずしも適切ではない). J. Chadwick (チャドウィック) による中性子の発見 (1932年) を受けて，同年に Heisenberg は原子核が一般に陽子 p と中性子 n (両者は質量がほとんど等しい) から構成されるという仮説を立て，原子核構造論を構築するために，この概念を導入した. すなわち“核子”N (1核子系) が仮想的な“アイソ空間”においてアイソスピン 1/2 を持つものと想定し，そのアイソスピン成分が ±1/2 の状態をそれぞれ p および n と見なした. 同様に π^0 と $\pi^{\pm}$ はアイソスピン1の粒子の3つの状態と見ることができる (式(1.56)参照).

値や，荷電中間子・中性中間子の低エネルギー光生成に基づく推定値などともよく一致している．

1-中間子交換相互作用において重視すべきもうひとつの特徴は，その“テンソル力”としての性質である．2つの中間子の交換や，他の重い中間子の交換は，そのようなテンソル力へ大きな寄与を持ち得ない．したがって1-中間子交換は，2核子の間に実際に存在しているテンソル力に対して主要な寄与を与えている．^3S $(T=0)$ の場合には，1-中間子交換において $\boldsymbol{\tau}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\tau}^{(2)} = -3$ なので，そのポテンシャルは引力と予想される．このように予測される符号は重水素の四重極能率の符号を正しく説明する (‘みかん的’ [tangerine-like] ではなく ‘葉巻たばこ的’ [cigar-like] である§)．1930年代に様々な中間子理論が提案されたが，π 中間子が発見される以前から，既に上述の理由によって，アイソスピン1 (すなわち電荷が $0, \pm e$) の擬スカラー粒子の理論が J. Schwinger などによって好んで採り上げられた．

ベクトル中間子の交換 本節ではスピンがゼロの中間子と光子の伝播関数に関する規則を詳しく論じてきた．しかし自然界には質量を持つスピン1の中間子 (ベクトル中間子) も存在する (ρ, ω, K*, ϕ)†．したがってスピン1の中間子の伝播関数に関する規則の考察も空論ではない．光子の伝播を表す式(4.334) に対応する，有限の静止質量を導入したスピン1の中間子の伝播成分は，

$$\frac{\delta_{\mu\nu} + (q_\mu q_\nu/\mu^2)}{i(q^2 + \mu^2 - i\epsilon)} \tag{4.380}$$

と与えられる．これを場の量子論から導く作業は少々複雑である．しかしスピン1の粒子が源 j_μ に結合している波動関数を見てみると (p.24, 問題1-4)，式(4.380) の妥当性を推察できる．

$$\Box\phi_\mu - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial\phi_\nu}{\partial x_\mu}\right) - \mu^2\phi_\mu = j_\mu \tag{4.381}$$

両辺について4元発散を取ると，次式を得る．

$$-\mu^2\frac{\partial\phi_\mu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}j_\mu \tag{4.382}$$

したがって，波動方程式(4.381) は，次のように書き換えられる．

§(訳註) 反平行な2重極同士を互い違いに隣接させたような型 (⇆) と，直線的につないだような型 (←→) の区別を意味している．

†(訳註) 擬スカラー中間子 $\pi(\pi^0, \pi^\pm)$，η，$\mathrm{K}(\mathrm{K}^0, \bar{\mathrm{K}}^0, \mathrm{K}^\pm)$ は8重項を形成し (η' まで考慮すると9重項)，ベクトル中間子 ρ，ω，K* および ϕ も同様に9重項 (8重項＋1重項) を形成している．これらに関与する組成クォークは u，d，s (およびそれらの反クォーク) で共通であるが，スピン合成の違いによって全角運動量，すなわち中間子としてのスピンが 0 ([擬]スカラー) もしくは 1 (ベクトル) になっている．p.233脚註参照．以下，各中間子の組成クォークを紹介しておく．π^0, ρ^0 ($\mathrm{u\bar{u}, d\bar{d}}$ 混成)；π^+, ρ^+ ($\mathrm{u\bar{d}}$)；π^-, ρ^- ($\mathrm{\bar{u}d}$)；η, ω ($\mathrm{u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}}$ 混成)；K^0, K^{*0} ($\mathrm{\bar{s}d}$)；$\bar{\mathrm{K}}^0$, $\bar{\mathrm{K}}^{*0}$ ($\mathrm{s\bar{d}}$)；K^+, K^{*+} ($\mathrm{\bar{s}u}$)；K^-, K^{*-} ($\mathrm{s\bar{u}}$)；η', ϕ ($\mathrm{u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}}$ 混成)．

$$
\begin{aligned}
\Box\phi_\mu - \mu^2\phi_\mu &= j_\mu + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\phi_\nu}{\partial x_\nu}\right) \\
&= j_\mu - \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}j_\nu \\
&= \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu\partial x_\nu}\right)j_\nu
\end{aligned}
\tag{4.383}
$$

ここで式(4.383) の最後の行を“新たな源”と見なして，式(4.294) から式(4.298) までと同様の作業を行う．このようにしてスピン1-中間子の運動量空間における伝播関数(4.380) が得られる．このベクトル中間子が保存する源に結合している場合には，源の4元発散 $(\partial/\partial x_\nu)j_\nu$ がゼロになるので，もちろん式(4.380) において $q_\mu q_\nu/\mu^2$ を省いてよい．

もしベクトル中間子の源が $i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ に比例するならば，ベクトル中間子の交換によるポテンシャルは，$1/r$ が $e^{-\mu r}/r$ に置き換わる点を除いて Møller 相互作用において論じた光子の交換によるポテンシャルと類似の形になる．これは“斥力の”球対称ポテンシャルおよび Thomas ポテンシャルと同符号のスピン-軌道ポテンシャルを含む．O. Chamberlain, E. Segrè, T. Ypsilantis やその他の人々が 1956年に行った陽子-陽子散乱実験から，相関のない擬スカラー π 中間子の交換に基づく中間子理論からは説明し難いような短距離の斥力とスピン-軌道相互作用が確認された．G. Breit と J. J. Sakurai は，π 中間子の数倍の質量を持つベクトル中間子を想定すれば，そのような短距離斥力とスピン-軌道相互作用が統一的に説明されることを指摘した (同様のベクトル中間子の可能性は，核子の電磁気的な形状因子を説明するために Y. Nambu [南部陽一郎] や W. R. Frazer and J. Fulco によっても推測された)．その後 B. C. Maglić や W. D. Walker などの実験によって，実際に重いベクトル中間子 (ω や $\rho^{\pm,0}$) が存在し，それらも核子間で交換され得ることが明らかになった．

4.7 質量と電荷の繰り込み；輻射補正

本書の最後となる本節では，量子電磁力学における高次の過程に焦点を当てる．我々は2次までの過程から導いた Feynman 規則が，より複雑な場合に対しても一般化されるものと仮定する．一般の n 次 S 行列に関する Feynman 規則の場の理論による証明は，必ずしも自明ではない．$S^{(2)}$ を書く方法が 2! 通りあるのと同様に (式(4.48))，$S^{(n)}$ を書く方法は $n!$ 通りある．与えられた任意の問題において，我々は S 行列要素における種々の場の演算子積に対して時間順序をうまく操作して，最終的な結果を電子や光子の伝播関数と，消滅・生成する粒子の波動関数によって表すことができる．この作業を系統的な方法に基づいて行うためには，F. J. Dyson と G. C. Wick(ウィック)が構

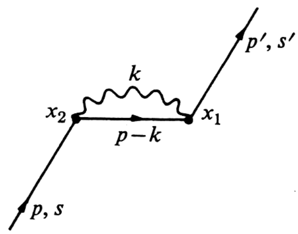


図4.22　電子の自己エネルギー.

築した時系列積 (chronological product) と正規積 (normal product) に基礎を置く形式を採用するのが効率的な方法である (これについては大抵の標準的な場の量子論の教科書において論じてある[43]).

電子の自己エネルギー　外部ポテンシャルに対する輻射補正のような高次過程を扱う前に，共変な摂動論を用いて相対論的な電子の自己エネルギーを調べておくことが有用である．自己エネルギーに関係する行列要素は (e^2 までの次数で) 図4.22 のように表される．波線で示した内線は，共変な光子の伝播を表す．この単一のダイヤグラムは，旧式の言葉を用いるならば，電子とその電子自身によって生じている Coulomb 場との瞬時の相互作用，および仮想的な横波光子の放射と再吸収を伴う自己相互作用の両方を表している (‘非相対論的な’ 電子に関する後者の自己エネルギーの効果は既に 2.8節において考察した)．$t_2 > t_1$ の場合，図4.22 は中間状態において電子-陽電子対(つい)が存在する仮想過程を表すことに注意してもらいたい (x_1 において対生成が起こり，それから x_2 において対消滅が起こる).

外場が無いものとすると，電子が $(\mathbf{p}, s)$ の状態から $(\mathbf{p}', s')$ の状態へ遷移する 2 次の S 行列要素を，Feynman 規則を用いて次のように書くことができる.

$$S_{fi} = -i(2\pi)^4\delta^{(4)}(p-p')\sqrt{\left(\frac{m}{EV}\right)\left(\frac{m}{E'V}\right)}\,\bar{u}^{(s')}(\mathbf{p}')\Sigma(p)u^{(s)}(\mathbf{p}) \qquad (4.384)$$

上式における電子の “自己エネルギー部分” $\Sigma(p)$ は，エネルギーの次元を持つ次のような 4×4 行列である.

$$-i\Sigma(p) = (-e)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{i(k^2-i\epsilon)}\gamma_\mu\frac{-i\gamma\cdot(p-k)+m}{i[(p-k)^2+m^2-i\epsilon]}\gamma_\mu \qquad (4.385)$$

[43] Dyson-Wick形式の特に明快な議論は Mandl (1959), pp.87-104 において見られる．Akhiezer and Berestetskii (1965), pp.309-316 では量子電磁力学における一般的な 3 次の S 行列要素が詳細に論じられている.

ここで4元運動量空間において，自明ではない積分を1回実行しなければならないことに注意してもらいたい．この積分の必要性は，2つの結節点(ヴァーテックス)それぞれにおいてエネルギー-運動量保存を仮定しても，仮想光子の4元運動量に任意性が残されていることから予想される．

不変性の観点から，$\Sigma(p)$ は恒等行列と 4×4 行列 $\gamma\cdot p$ の線形結合によって表される．しかし $\Sigma(p)$ を $-i\gamma\cdot p=m$ の“点”の近傍で，次のように展開する方が都合がよい．

$$\Sigma(p)=A+(i\gamma\cdot p+m)B+(i\gamma\cdot p+m)^2\Sigma^f(p) \tag{4.386}$$

A，B，$\Sigma^f(p)$ はガンマ行列を含まないものとする．$\Sigma(p)$ を式(4.384) に現れるような自由粒子スピノルによって挟む場合に，A の項だけが寄与を持つことは明らかである．A の物理的な意味を理解するために，次の“虚構的な相互作用‡”を考える．

$$\mathcal{H}_{\mathrm{int}}=\delta m\bar{\psi}\psi \tag{4.387}$$

これは自由場Diracハミルトニアンの質量項への補正として見ることができる．この虚構的相互作用から生じる1次のS行列要素は，

$$S_{fi}=-i(2\pi)^4\delta^{(4)}(p-p')\sqrt{\left(\frac{m}{EV}\right)\left(\frac{m}{E'V}\right)}\delta m\bar{u}^{(s')}(\mathbf{p}')u^{(s)}(\mathbf{p}) \tag{4.388}$$

となる．式(4.384) において $\Sigma(p)$ を A に置き換えて，それを式(4.388) と比べると，A は図4.22 に示された相互作用過程に起因する質量の補正であり，

$$A=\delta m \tag{4.389}$$

と解釈できる．自由電子に関する限り，$m=m_{\mathrm{bare}}$ (e をゼロと仮想した場合の“裸の”電子質量) から議論を始めて図4.22 の過程を考慮する理論は，$m=m_{\mathrm{bare}}+\delta m$ から議論を始めて図4.22 の過程を省く理論と等価である．しかしながら電子が自由電子ではない場合になると，自己エネルギーダイヤグラムが単純な質量補正以外にも影響を持つことが後から分かる．したがって一般的には，

$$m=m_{\mathrm{bare}}+\delta m \tag{4.390}$$

に立脚して議論を始め，かつ自己エネルギーダイヤグラムを考慮しておいてから，虚構的な相互作用(4.387) による影響を“差し引く”ことにする方がよい．換言すると，

‡(訳註)“虚構的”(fictitious) ではあるが，これを導入することによって有限な有意の計算結果が得られるようになるという意味において，計算手続き上はあたかも“実在”するかのように扱うことになる．

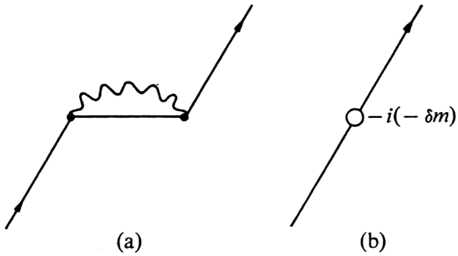


図4.23 自由場の方程式において“観測される”質量を用いる場合に考慮すべきダイヤグラム.

我々が自由場の方程式における質量として，虚構的な相互作用の影響を含めた，実際に観測される“繰り込まれた質量”(renormalized mass) $m_{\text{bare}} + \delta m$ を用いるならば，全相互作用密度は通常の相互作用密度から，最初に余分に考慮しているはずの $\delta m\bar{\psi}\psi$ を“引き算した”形にする必要があり[§]，ダイヤグラムは図4.23 の (a) と (b) を“両方とも”考えなければならない．後者は虚構的な相互作用密度(4.387) の 1 次過程を“引き算して元に戻す”効果を表している．上述の内容を 2.8節と比較すると，この引き算の手続き (1947年に Z. Koba [木庭二郎] と S. Tomonaga [朝永振一郎] によって定式化された) は，H. A. Kramers(クラマース)による質量の繰り込みの概念を共変な形式へ一般化したものであることが分かる.

付録E で示すように，式(4.386) において $\Sigma^f(p)$ は有限であるが，定数 A と B は無限大になってしまう．この無限大は，図4.22 の中に示されている仮想光子のエネルギー-運動量が任意に大きな値を取り得ることに起因している．このような発散の困難は，現代の理論物理における最も深刻な難点のひとつとして挙げられる．物理学者たちは，短距離における非常に大きな4元運動量を持つ仮想光子の放射や吸収が，通常の伝播関数の規則によって正しく説明できないという問題に直面しているのである．しかし一方で k^2 が小さい場合には，伝播関数の規則がよく成立することを我々は知っている．したがって Σ に関して有限な結果を得るために，共変な光子伝播関数の Fourier変換を，たとえば作為的に次のように修正する措置が考えられる.

$$\frac{\delta_{\mu\nu}}{i(k^2 - i\epsilon)} \rightarrow \frac{\delta_{\mu\nu}}{i(k^2 - i\epsilon)} C(k^2) \tag{4.391}$$

---

§(訳註) このように“裸の”パラメーター値と異なる“観測される”基礎パラメーター値を採用したことによる影響を除くために導入する引き算の項を“相殺項”(counter term) と呼ぶことが多い.

切断(カットオフ)関数と呼ばれる $C(k^2)$ は，次の条件を満たすように設定する．

$$C(k^2) \approx 1 \quad \text{for} \quad |k^2| \ll \Lambda^2$$
$$C(k^2) \approx 0 \quad \text{for} \quad |k^2| \gg \Lambda^2 \tag{4.392}$$

式(4.392) において，切断パラメーター Λ (正の実数) は電子質量よりもはるかに大きいものと仮定する (後から論じるように，おそらくミュー粒子の質量より少なくとも1桁以上大きい)．もちろん $C(k^2)$ として用いることのできる関数の候補は色々ある．特に単純な例としては，

$$C(k^2) = \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + k^2} \tag{4.393}$$

が考えられる (付録E において A を計算するためにこの関数を用いている)．修正した光子の伝播関数(4.391) を式(4.385) に代入すると，発散する定数 A を Λ によって表すことができる．計算は付録E において示すが，次のようになる．

$$A = \frac{3\alpha m}{2\pi} \log\left(\frac{\Lambda}{m}\right) \tag{4.394}$$

自由な Dirac 電子の自己エネルギーが正であり，切断パラメーターに対数的に依存し，係数因子が $3\alpha m/2\pi$ となるという上記の結果は，1939年に V. F. Weisskopf(ワイスコップフ)によって与えられた．

上述の結果を非相対論的な電子の自己エネルギー効果と比較してみることは教育的である．非相対論的な理論 (Schrödinger 理論) において，電子の自己エネルギーの Coulomb 部分は，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{x}'$ を近づけたときの，

$$\frac{e^2}{2}\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

の期待値として，次のように与えられる．

$$\begin{aligned}
E_{\text{self}}^{\text{Coul}} &= \frac{e^2}{2}\int \psi_{\text{NR}}^*(\mathbf{x})\left[\int \frac{d^3x'}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\right]\psi_{\text{NR}}(\mathbf{x})d^3x \\
&= \frac{e^2}{2}\int \psi_{\text{NR}}^*(\mathbf{x})\left[\int d^3p \int \frac{d^3x'}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\right]\psi_{\text{NR}}(\mathbf{x})d^3x \\
&= \frac{e^2}{2(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{|\mathbf{p}|^2} \\
&= \frac{\alpha}{\pi}\int d|\mathbf{p}|
\end{aligned} \tag{4.395}$$

これは $|\mathbf{p}|$ の"1次"で発散する．2.8節では非相対論的な電子の横波光子の放射と吸収による自己エネルギーが，やはり仮想光子の運動量に1次で依存することを見た

(式(2.248))．電子の自己エネルギーの発散が，非相対論的に扱うよりも相対論的に扱うことで（冪発散から対数発散へ）著しく弱くなることの定性的な理由は，次のように説明される．Dirac電子論では，電子の近傍において仮想的な電子-陽電子対の生成を考慮する必要がある．Pauliの排他律により，元の電子と仮想電子との間には実効的な斥力がはたらく．このことは“物理的な電子”の実効的な電荷分布を総体的に拡げる効果を持つので，自己エネルギーは低下する[44]．この仮想対による効果が現れる特徴的な距離は $1/m$ 程度，すなわち古典電子半径（$\sim 3\times10^{15}$ m）の137倍のオーダーであり，電子の古典論（および非相対論的なSchrödinger理論）はこの尺度以下になると破綻する．したがって，電子の自己エネルギーの問題を古典論の枠内で論じることは非現実的である．

仮に自己エネルギー(4.394)が，観測される電子質量の実質的な部分を占める（すなわち $A \to m$）と考えた場合に，Λ がどの程度の値になるかを見てみよう．これは，

$$\Lambda \sim m e^{2\pi/3\alpha} \approx 10^{100} m \tag{4.396}$$

すなわち逆数にして $\sim 10^{-111}$ cm（$\sim 10^{-113}$ m）という距離になる．この切断エネルギー Λ の値は“馬鹿馬鹿しいほど”高すぎる．このことの関連で言及するなら，全宇宙の質量はおよそ $10^{80}m$ と推定されている．仮想光子のエネルギー-運動量がそのような高い値に到達する前に，多くの“新たな物理”が現れるであろうことに間違いはない．したがって，観測される電子質量のほとんどの部分が図4.22 (p.345) に示されるような相互作用に起因するという考え方は，極めて疑わしいものと見なさねばならない．これ以降は $A = \delta m$ が形式的には発散していても，電子質量に比べて1/137倍のオーダーという意味合いにおいて“小さい”ものとして扱うことにする．仮に $\Lambda = 10$ GeV としても，A は $0.015m$ に過ぎない．

次に，式(4.386)における係数 B の物理的な意味を理解するために，図4.22の自己エネルギー相互作用を“一部”として含むような，さらに複雑なダイヤグラムを考えることが役に立つ．この目的のために，まず図4.24(a)のような電子の内線を見てみよう．式の記述を簡単にするために，$S_{\mathrm{F}}(p)$ を次のように定義する[†]．

$$S_{\mathrm{F}}(p) = \frac{-i\gamma\cdot p + m}{i(p^2 + m^2)} = \frac{1}{i(i\gamma\cdot p + m)} \tag{4.397}$$

$-i\epsilon$ を明示しないが，これも暗黙のうちに含んでいるものと見なしておく．ここで問うべき問題は，自己相互作用が存在する場合に $S_{\mathrm{F}}(p)$ がどのように変わるかという

[44] このことの関連で興味深いことを指摘しておくと，荷電Klein-Gordon粒子の自己エネルギーは Λ の“2次”で発散する．

[†] (訳註) $S_{\mathrm{F}}(p)$ は必ずしも $S(x-x')$ のFourier変換そのものではない (p.272参照)．それぞれの定義における定係数の付け方に注意が必要である．光子に関する $D_{\mathrm{F}}(x-x')$ (p.329脚註) と $D_{\mathrm{F}}(q)$ (式(4.402)) についても同様の注意が必要である．

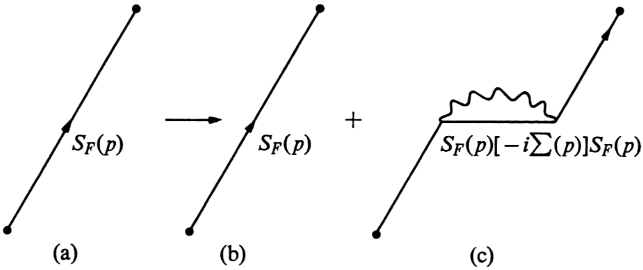


図4.24 電子伝播関数の修正.

ことだが，図4.24(a) のような電子の内線それぞれに対して，図4.24(c) のような高次のダイヤグラムを考えなければならないことは明らかである．このことは，電子の伝播関数を (運動量空間において) 次のように修正すべきことを意味する．

$$S_{\mathrm{F}}(p) \;\to\; S_{\mathrm{F}}(p) + S_{\mathrm{F}}(p)\,[-i\Sigma(p)]\,S_{\mathrm{F}}(p) \tag{4.398}$$

元の $S_{\mathrm{F}}(p)$ の中に現れる m は“裸の質量”(bare mass) と理解すべきパラメーターである．これを評価する前に，任意の演算子 X と Y (非可換でもよい) について成立する，有用な恒等式を示しておく．

$$\frac{1}{X+Y} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X}Y\frac{1}{X} + \frac{1}{X}Y\frac{1}{X}Y\frac{1}{X} - \cdots \tag{4.399}$$

上式は右から $X+Y$ を掛けることによって証明される．式(4.398) に，$\Sigma(p)$ の展開式(4.386) を，有限な $\Sigma^f(p)$ を省いて代入してみよう[45]．式(4.398) の修正は，次のような置き換えに相当することが分かる．

$$\begin{aligned}\frac{1}{i(i\gamma\cdot p+m)} &\to \frac{1}{i(i\gamma\cdot p+m)} + \frac{1}{i(i\gamma\cdot p+m)}(-iA)\frac{1}{i(i\gamma\cdot p+m)} - \frac{B}{i(i\gamma\cdot p+m)}\\ &= \frac{1-B}{i[i\gamma\cdot p+(m+A)]} + 0(\alpha^2)\end{aligned} \tag{4.400}$$

上式では公式(4.399) を利用した．前に述べておいたように，A と B は両方とも切断パラメーターに依存しており，切断エネルギーを無限大にすると両方とも発散する．しかしながら修正された伝播関数 (式(4.400) の最後の行) は，元々の (裸の電子の)

[45] $\Sigma^f(p)$ の項は，p^2 が $-m^2$ と大きく異なる場合に，電子の伝播関数に対して運動量遷移に依存する構造を付与することを示せる．$\Sigma^f(p)$ は有限なので，量子電磁力学における発散の困難を回避する目的のためには無関係である．

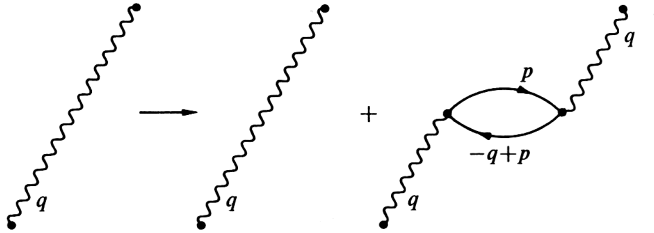


図4.25 光子の伝播関数に対する修正.

伝播関数とよく似た形をしている．第1に，修正された伝播関数における新たな質量は $m+A$ であり，これは既に示した A に対する解釈に整合する．第2に，上述の質量の変更以外では，元の伝播関数に対して全体に定数 $1-B$ が掛かるだけの違いしか生じていない．運動量空間における修正された伝播関数を $S_{\mathrm{F}}'(p)$ と表記し，電子の質量の変更を無視すると，$-i\gamma\cdot p=m$ の近傍において，

$$S_{\mathrm{F}}'(p)=(1-B)S_{\mathrm{F}}(p) \tag{4.401}$$

となる．定数 B の物理的な含意については，後で結節点（ヴァーテックス）補正を論じる際に言及することにして，この段階では $1-B$ という因子が“物理的な”（‘衣をまとった’）電子状態において“裸の”電子を見いだす確率にあたることを紹介するに止めておく．定数 $1-B$ は電子の波動関数に対する（次数 α までの）繰り込み定数 (renormalization constant) と呼ばれる[46]．

光子の自己エネルギー；真空偏極　電子の伝播関数と同様の方法で，共変な光子伝播関数の修正についても考察しよう．光子の伝播関数に対する修正は，図4.25 に示すように共変な光子が一時的に仮想電子-仮想陽電子対（つい）に変わる過程によって生じる[47]．図4.22 と類似した，電子の閉じたループ（‘泡’）を含んだ図4.25 の右側のダイヤグラムは“光子の自己エネルギーダイヤグラム”と呼ばれる．4元運動量空間における元々の光子伝播関数が，

$$D_{\mathrm{F}}(q)=\frac{-i}{q^2} \tag{4.402}$$

46) 一般的に（$-i\gamma\cdot p=m$ の近傍における）$S_{\mathrm{F}}'(p)$ と $S_{\mathrm{F}}(p)$ の比例定数は Z_2 と書かれるので $S_{\mathrm{F}}'(p)=Z_2S_{\mathrm{F}}(p)$ (at $-i\gamma\cdot p\approx m$) である．次数 α まででは $Z_2=1-B$ と見なせる．

47) この修正の性質を，式(4.390) の修正と混同してはならない．式(4.390) は電子の自己エネルギーを有限にするための“人為的な仕掛け”である．

と表されること (やはり $-i\epsilon$ が暗に含まれるものと見なす) を思い出して，図4.25 によって表される修正を，次のように書いてみる．

$$\begin{aligned}\delta_{\mu\nu}D_{\mathrm{F}}(q) &\to \delta_{\mu\nu}D_{\mathrm{F}}(q)+\delta_{\mu\lambda}D_{\mathrm{F}}(q)[-i\Pi_{\lambda\sigma}(q)]\delta_{\sigma\nu}D_{\mathrm{F}}(q)\\ &= \left\{\delta_{\mu\nu}+D_{\mathrm{F}}(q)[-i\Pi_{\mu\nu}(q)]\right\}D_{\mathrm{F}}(q)\end{aligned} \tag{4.403}$$

上の光子伝播関数に対する修正は，式(4.398) の電子伝播関数の修正に対応するものである．ここでエネルギーの自乗の次元を持つ $\Pi_{\mu\nu}(q)$ という量を計算する必要があるが，これは“偏極応答テンソル”と呼ばれる．先に結果を示すことにする．

$$-i\Pi_{\mu\nu}(q) = -(-e)^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left\{\frac{-i\gamma\cdot(-q+p)+m}{i[(-q+p)^2+m^2-i\epsilon]}\gamma_\mu\frac{-\gamma\cdot p+m}{i(p^2+m^2-i\epsilon)}\gamma_\nu\right\} \tag{4.404}$$

電子の伝播関数が２つ含まれることは理解しやすい．電子の自己エネルギーの場合と同様に，運動量空間において積分がひとつ残っている．これはやはり２つの結節点（ヴァーテックス）それぞれにおいてエネルギー-運動量保存を仮定しても，内線の仮想エネルギー-運動量が固定されないためである．式(4.404) において，既知の規則に照らして自明とは言えない点は，負号と対角和（トレース）記号である．これらの新たな特徴を理解するために，e^2 の次数までのS行列展開に戻ってみよう．電子の演算子に関する限りにおいて，始状態も終状態も真空状態であった．したがって $t_1 > t_2$ の場合に，次の因子を考えなければならない．

$$\begin{aligned}&(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}\langle 0|\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1)\psi_\beta^{(+)}(x_1)\bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2)\psi_\delta^{(-)}(x_2)|0\rangle\\ &\quad= (\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}\langle 0|\psi_\beta^{(+)}(x_1)\bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2)\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1)\psi_\delta^{(-)}(x_2)|0\rangle\\ &\quad= (\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}\langle 0|\psi_\beta^{(+)}(x_1)\bar{\psi}_\gamma^{(-)}(x_2)|0\rangle\langle 0|\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x_1)\psi_\delta^{(-)}(x_2)|0\rangle\\ &\quad= -\langle 0|T\big(\psi_\delta(x_2)\bar{\psi}_\alpha(x_1)\big)|0\rangle(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\langle 0|T\big(\psi_\beta(x_1)\bar{\psi}_\gamma(x_2)\big)|0\rangle(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}\end{aligned} \tag{4.405}$$

上式から閉じたループにおいて負号が生じる理由を理解できる[48]．式(4.404) の対角和（トレース）の成因も，式(4.405) の最後の行における Dirac 添字の現れ方を見れば明らかである．

$\Pi_{\mu\nu}(q)$ は，$\Sigma(p)$ のような Dirac 添字を持つ 4×4 行列では“ない”という点に注意する必要がある．$\Pi_{\mu\nu}(q)$ の一般的な構造を，式(4.404) とは別に Lorentz 共変性の要請からも推定できる．ここで変量として利用できるのは４元ベクトルがひとつだけ，すなわち共変な光子の４元運動量 q だけである．したがって $\Pi_{\mu\nu}(q)$ は，q^2 を用いた不変なスカラー関数の $\delta_{\mu\nu}$ 倍と，もうひとつの不変なスカラー関数の $q_\mu q_\nu$ 倍の

48) これは“任意の”閉じたフェルミオンのループへ一般化できる規則である．

和の形に書けるはずである．しかし $q=0$ の場合の偏極応答テンソル $\Pi_{\mu\nu}$ は $\delta_{\mu\nu}$ だけに比例しなければならない．したがって次のように書くいておくと更に見通しがよくなる．

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = D\delta_{\mu\nu} + \delta_{\mu\nu}q^2\Pi^{(1)}(q^2) + q_\mu q_\nu \Pi^{(2)}(q^2) \tag{4.406}$$

D は定数であり ($D_{\mathrm{F}}(q)$ と混同してはいけない)，次のように定義される[49]．

$$\Pi_{\mu\nu}(0) = D\delta_{\mu\nu} \tag{4.407}$$

q の 4 つの成分がすべて小さい場合を想定して，共変な光子伝播関数を修正してみよう．具体的な例として，2 つの低速電子が 1 - 光子交換によって相互に弾性散乱する過程を考える．式(4.406) において第 1 項 $D\delta_{\mu\nu}$ だけを残すことにすると，式(4.403) は次のようになる (式(4.399)参照)．

$$\begin{aligned}\frac{\delta_{\mu\nu}}{iq^2} &\to \frac{\delta_{\mu\nu}}{iq^2} + \frac{1}{iq^2}(-iD\delta_{\mu\nu})\frac{1}{iq^2}\\ &= \frac{\delta_{\mu\nu}}{i(q^2+D)} + 0(\alpha^2)\end{aligned} \tag{4.408}$$

しかしこれは，保存する源と結合した質量 $\sqrt{D}$ を持つ中性ベクトル中間子の伝播関数と実質的に何ら変わらない (式(4.380)参照)．この修正された伝播関数は，静的な極限において電子間に湯川型の斥力ポテンシャル $\exp\left(\sqrt{D}r\right)/r$ を生じるはずである．しかし我々は“観測される光子”の質量がゼロであり，低速電子間の相互作用が巨視的な尺度において $1/r$ に従うことを知っている．したがって正しい理論では $D=0$ が導かれなければならない．しかしながら式(4.404) と式(4.407) によると，D は次のように与えられる (式(4.404) において $q=0,\ \mu=\nu$ と置く)．

$$\begin{aligned}D &= \frac{ie^2}{4}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left[\frac{(-i\gamma\cdot p+m)\gamma_\mu(-i\gamma\cdot p+m)\gamma_\mu}{(p^2+m^2-i\epsilon)^2}\right]\\ &= ie^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{(2p^2+4m^2)}{(p^2+m^2-i\epsilon)}\end{aligned} \tag{4.409}$$

上式の計算には，

$$\sum_{\mu=1}^{4}\Pi_{\mu\mu}(0) = D\sum_{\mu=1}^{4}\delta_{\mu\nu} = 4D \tag{4.410}$$

とガンマ行列に関する公式(4.341) を用いた．如何なる“正直な”計算でも $D\neq 0$ となるであろうことを納得するのは難しくない．実際，収束因子 $[\Lambda^2/(p^2+\Lambda^2)]^2$ を

[49] $q=0$ のときに $q^2=0$ となることは自明だが，一般に $q^2=0$ のときに $q=0$ となるわけではないことに注意せよ．

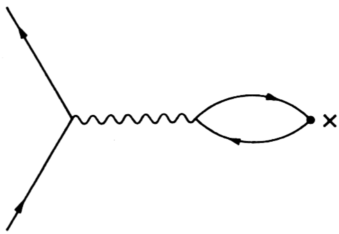


図4.26 真空偏極.

採用する付録E の技法によって，D は正の実定数であり，Λ に２次で依存することが導かれる．言い換えると式(4.409) に基づく直接的な計算から次の結果が得られる．裸の光子の質量がゼロであれば，物理的な光子の質量は切断エネルギーの自乗に比例する．

このように２次で発散する定数 D を除く方法に関して，多くの技巧的な論文が書かれてきた．たとえば W. Pauli and F. Villars は，式(4.404) の被積分関数から m だけを非常に大きな質量に置き換えた式を差し引いたものを適当な収束因子とともに積分すれば (そのような手続きは物理的な粒子の描像において意味を持たないにしても) 穏当な結果が得られることを指摘した．他の人々には，むしろ有限な裸の質量 μ_{bare} を持つ中性ベクトルボソン場の理論を起点として，繰り込みを施した“後の”質量を“正確に”ゼロにする方法，すなわち $\delta\mu^2 = -\mu^2_{\text{bare}}$ とする方法が好まれている (現実の $\mu^2_{\text{physical}} = 0$ に対する説明としてはかなり作為的に見えるけれども)[50]．この類の議論の本質は，観測される光子の質量が厳密にゼロになるように定式化を行わねばならないということに過ぎないので，本書では詳細には立ち入らない．代わりに次の問題を考えよう．２次で発散する定数 D が除かれた後の $\Pi_{\mu\nu}(q)$ は，質量補正以外の興味深い物理を含んでいるだろうか？

式(4.406) に現れる $\Pi^{(1)}$ と $\Pi^{(2)}$ について考察する前に，まだ明示していない $\Pi_{\mu\nu}$ の性質をひとつ指摘しておきたい．4.3節で扱ったような，外部から与えたポテンシャルの電子への影響を考えてみよう．図4.2(a) (p.245) は e と外場の強さを表すパラメーター (Coulombポテンシャルの場合は Ze) の単純な１次同士の積の次数を持つグラフであるが，これに加わる高次の寄与として，図4.26 のような過程もあり得る．これは“真空偏極 (vacuum polarization)‡”と呼ばれ，× は外場との１次の相互作

[50] この方法は Jauch and Rohrlich (1955), pp.191-192 に少々詳しく論じられている．

‡(訳註)“vacuum polarization”という術語は，[a] 電場 (自由光子) に対する応答として生

用を表す．このダイヤグラムの振幅は，直接的な外場散乱 (図4.2(a)) の振幅の 1/137 倍程度である．これに対応するS行列要素は，

$$\frac{e^3\bar{u}'\gamma_\mu u}{q^2}\Pi_{\mu\nu}(q)\tilde{A}_\nu^{(e)}(q) \tag{4.411}$$

と表される．$\tilde{A}_\nu^{(e)}(q)$ は外部ポテンシャルの４次元Fourier変換である．図4.26 を見ると，仮想電子-陽電子対(つい)が，光子伝播関数の修正 (p.351, 図4.25) において考えた偏極応答テンソルと同じ積分を生じることが分かるので，$\Pi_{\mu\nu}$ が現れることはグラフからそのまま理解できる．式(4.411) を Møller 散乱振幅の直接散乱項と比べると，図4.20(c) (p.330) が電子１の４元電流 (電荷電流密度) と電子２の４元電流の 1-光子交換相互作用を表しているのと全く同様に，図4.26 は４元電流と $e^2\Pi_{\mu\nu}\tilde{A}_\nu^{(e)}$ の１-光子交換相互作用として捉えることができる．この観点からすると，$e^2\Pi_{\mu\nu}\tilde{A}_\nu^{(e)}$ は外部ポテンシャルによって真空中に誘起された４元電流の Fourier変換に他ならない．$\Pi_{\mu\nu}$ は外部ポテンシャルと，そこから誘起される４元電流の比率を与えることに注意してもらいたい．これが $\Pi_{\mu\nu}$ を真空の“ polarization tensor ”すなわち“偏極応答テンソル”と呼ぶ理由である[§]．誘起された４元電流は，連続の方程式を満たすものと想定されるので，運動量空間において，

$$q_\mu\Pi_{\mu\nu}(q)\tilde{A}_\nu^{(e)}(q) = 0 \tag{4.412}$$

でなければならない．上式が任意の外部ポテンシャルの下で成立する必要があるので，偏極応答テンソルの一般的な性質として，次の重要な結果が導かれる．

$$q_\mu\Pi_{\mu\nu}(q) = 0 \tag{4.413}$$

外部ポテンシャルにゲージ変換を施しても，誘起電流は不変でなければならないという要請から，次の関係も推定される．

$$\Pi_{\mu\nu}(q)q_\nu = 0 \tag{4.414}$$

じる仮想対 (光子伝播線の途中にある‘泡’のグラフ) による電気的な偏りの効果を表す場合と，[b] 真空からの時間発展によって自発的に仮想光子と共に生じ得る仮想対の生成消滅による効果 (孤立した‘泡’のグラフで表される真空偏極的なゆらぎ $\langle 0|S|0\rangle$) を表す場合があって，一般には用法が一定していない．本書では [a] だけが扱われている．

§(訳註)“ polarization tensor ”は必ずしも $\Pi_{\mu\nu}$ に対する慣用的な呼称ではない．電磁場自体の偏極 (偏光) 状態を表す「偏極ベクトル(polarization vector)」という術語との兼ね合いを考えると，電磁場に対する真空の応答特性を表す $\Pi_{\mu\nu}$ を単に「偏極テンソル」と呼ぶのは misleading である．本稿では少々無理を承知で「偏極“応答”テンソル」と訳出しておく．ニュアンスは全く異なるが，$\Pi_{\mu\nu}$ の慣用的な呼称としては「光子の自己エネルギー部分」がある．

しかし $\Pi_{\mu\nu}$ が本来 μ と ν に関して対称であることは自明なので (式(4.406)参照), 式(4.414) から新たな情報が得られるわけではない. 式(4.406) のように形が決まっている $\Pi_{\mu\nu}$ に対して式(4.413) の要請を課すると, 次のようになる.

$$q_\nu \left[D + q^2\Pi^{(1)}(q^2) + q^2\Pi^{(2)}(q^2)\right] = 0 \tag{4.415}$$

ここから, 次式を得る[51].

$$\Pi^{(2)} = \frac{-D}{q^2} - \Pi^{(1)} \tag{4.416}$$

したがって, $\Pi_{\mu\nu}$ は次のように表される.

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \left(\delta_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu\right)\Pi(q^2) \tag{4.417}$$

上式で導入した無次元の偏極応答関数 $\Pi(q^2)$ の定義は, $\Pi(q^2) = -\Pi^{(2)}(q^2)$ である.

$\Pi(q^2)$ を算出するには, 偏極応答テンソルの式(4.417) において $\mu = \nu$ と置き, 添字 μ に関する和を取ればよい.

$$\sum_{\mu=1}^{4}\Pi_{\mu\mu}(q) = \left(q^2\sum_{\mu=1}^{4}\delta_{\mu\mu} - q^2\right)\Pi(q^2) = 3q^2\Pi(q^2) \tag{4.418}$$

もし D が (これは $\sum_{\mu=1}^{4}\Pi_{\mu\mu}(0)/4$ に等しい) ゼロであれば, 上式を次のように表すこともできる.

$$\sum_{\mu=1}^{4}\Pi_{\mu\mu}(q) = \sum_{\mu=1}^{4}\left[\Pi_{\mu\mu}(q) - \Pi_{\mu\mu}(0)\right] \tag{4.419}$$

大抵の“正直な”計算では $D \neq 0$ となるにしても, $\Pi(q^2)$ の計算方法は, 式(4.409) の積分をゼロと見ることと整合する必要がある. そうでなければ観測される光子の質量にあたる量がゼロになり得ない. このことは我々が $\Pi(q^2)$ を算出する際に, 式(4.418) ではなく次式を使うべきことを意味している.

$$\Pi(q^2) = \frac{1}{3q^2}\sum_{\mu=1}^{4}\left[\Pi_{\mu\mu}(q) - \Pi_{\mu\mu}(0)\right] \tag{4.420}$$

($\Pi_{\mu\mu}(q)$ は式(4.404) によって与えられる.) $\Pi_{\mu\mu}(q)$ からゼロでない光子質量を生じる部分を除いておく必要があるからである. $\sum_\mu \Pi_{\mu\mu}(q)$ と $\sum_\mu \Pi_{\mu\mu}(0)$ はどちら

[51] 多くの教科書において, 式(4.413) もしくは式(4.414) の要請により D はゼロになると書かれているが, この議論は完全に正当なものではない. Lorentz不変性と電荷保存 (もしくはゲージ不変性)“だけ”からは, $\Pi^{(2)}$ が $q^2 = 0$ において極を持たないということを証明できないからである.

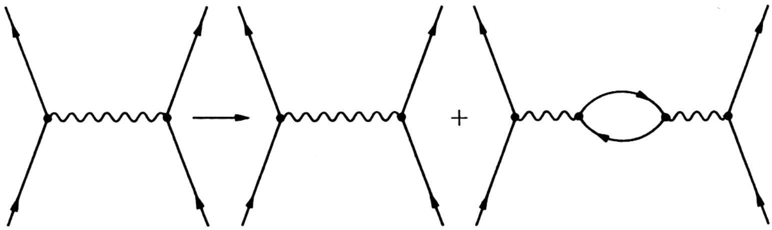


図4.27 Møller散乱の振幅の修正.

も2次で発散するが，式(4.420)に現れるこれらの差の発散は対数的でしかない．本来の偏極応答テンソルの式(4.404)および式(4.420)と付録Eの技法を用いれば，直接$\Pi(q^2)$を評価することができる．しかし後から代わりの（少々簡単な）$\Pi(q^2)$の計算方法を示すことになるので，ここでは計算を詳述しない．結果は次のようになる．

$$\Pi(q^2) = C + q^2\Pi^f(q^2) \tag{4.421}$$

$$C = \frac{\alpha}{3\pi}\log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \tag{4.422}$$

$$q^2\Pi^f(q^2) = -\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 dz\, z(1-z)\log\left[1+\frac{q^2 z(1-z)}{m^2}\right] \tag{4.423}$$

定数Cは切断Λに依存して対数的に発散するが，$\Pi^f(q^2)$は完全に有限である．q^2が小さい場合，式(4.423)を次式に置き換えることができる．

$$\Pi^f(q^2) = -\frac{\alpha}{\pi m^2}\left[\frac{1}{15}-\frac{1}{40}\left(\frac{q^2}{m^2}\right)+\cdots\right] \tag{4.424}$$

歴史を顧みると，Dが2次で発散し，Cが対数的に発散することは1934年の時点で既にP. A. M. DiracやW. HeisenbergやR. E. Peierls（パイエルス）が認識していたことである．$\Pi^f(q^2)$の構造についても1930年代にR. Serber，M. E. Rose，W. Pauliによって論じられていた．我々は古くから知られているこれらの結果を，共変な摂動論の言葉を用いて再現したのである．

次に，無次元の偏極応答関数$\Pi(q^2)$を構成するCとΠ^fの意味を具体的に考察する必要がある．電子の閉じたループによって，光子の伝播関数が修正されるという議論を思い出してみよう．この修正がMøller散乱の振幅に及ぼす影響は，グラフでは図4.27のように表される．この変更は，式の上では次のようになる．

$$\begin{aligned}
&\frac{e^2(\bar{u}_1'\gamma_\mu u_1)(\bar{u}_2'\gamma_\mu u_2)}{iq^2} \\
&\quad \to e^2(\bar{u}_1'\gamma_\mu u_1)\frac{1}{iq^2}\left[\delta_{\mu\nu} - \frac{i\Pi_{\mu\nu}(q^2)}{iq^2}\right](\bar{u}_2'\gamma_\nu u_2) \\
&\quad = e^2(\bar{u}_1'\gamma_\mu u_1)\frac{1}{iq^2}\left\{\delta_{\mu\nu} - \frac{(\delta_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu)[C + q^2\Pi^f(q^2)]}{q^2}\right\}(\bar{u}_2'\gamma_\nu u_2) \\
&\quad = e^2(1-C)\frac{(\bar{u}_1'\gamma_\mu u_1)(\bar{u}_2'\gamma_\mu u_2)}{iq^2} + ie^2\Pi^f(q^2)(\bar{u}_1'\gamma_\mu u_1)(\bar{u}_2'\gamma_\mu u_2)
\end{aligned} \tag{4.425}$$

最後の行を得るために，式(4.322) により $q_\mu q_\nu$ の項が寄与を持たないことを利用した．q^2 が小さい場合について調べてみよう．式(4.425) の最後の行において第1項の方が重要となることは明らかである．定数 C が，電子の自己エネルギーの議論において現れた B と類似の意味を持つことを見て取れる．修正された光子の伝播関数は，q^2 が小さければ元の伝播関数と因子 $(1-C)$ だけ異なる．運動量空間における修正された光子の伝播関数を $\delta_{\mu\nu}D_\mathrm{F}'(q)$ と書くことにすると，$D_\mathrm{F}'(q)$ は $q^2=0$ の近傍において，次のように表される．

$$D_\mathrm{F}'(q) = (1-C)D_\mathrm{F}(q) \tag{4.426}$$

上式は式(4.401) と類似関係を持つ．定数 $1-C$ は光子の (次数 α までの)“波動関数の繰り込み定数”と呼ばれる[52]．

$1-C$ を光子の伝播関数に対する補正因子と見なす代わりに，結合定数への補正と見ることも可能である．式(4.425) から，電子間の運動量の移行が非常に小さければ，修正された Møller 散乱振幅は最低次の Møller 振幅と同じ形をしており，修正の影響は電荷が実効的に，

$$e^2 \;\to\; e^2(1-C) \tag{4.427}$$

のように低減するだけの違い ($C>0$ である) として捉えられる．我々が物理的に測定する電荷は，2つの電子が運動量の移行の小さい相互作用をする強さによって決定される．このことの含意として物理的に“観測される”電荷 e_obs は，裸の電荷 e_bare (閉じたループの影響を考えない場合の電荷) の $\sqrt{1-C}$ 倍にあたる量に同定される．

$$e_\mathrm{obs} = \sqrt{1-C}\,e_\mathrm{bare} \tag{4.428}$$

したがって q^2 が小さい過程に関する限り，図4.27 によって表される修正は，単に実効的な結合定数を“弱める”にすぎない．観測によって求められている 1/137.04 と

52) 他の文献では $D_\mathrm{F}'(q)$ と $D_\mathrm{F}(q)$ の ($q^2=0$ の近傍における) 比例係数因子を一般的に Z_3 と書いているものもある．つまり $q^2\approx 0$ において $D_\mathrm{F}'(q) = Z_3 D_\mathrm{F}(q)$ であり，次数 α までで見れば $Z_3 = 1-C$ である．

いう値は $e_{\text{bare}}^2/4\pi$ そのものではなくて，これを $(1-C)$ 倍した量にあたる．電子の自己エネルギーの場合と同様に，短距離の領域において量子電磁力学がどのように修正されるべきかを誰も知らないので，e_{bare} の真の値は分からない．常套的な切断の手続きを採用するならば，切断エネルギーを 10 GeV のオーダーに設定しても，式(4.422) から計算される $e^2/4\pi$ の値の低減効果は 3％程度に過ぎない．

前の段落において我々が論じた基本的な概念は“電荷の繰り込み”(charge renormalization) として知られている．式(4.428) において e_{obs} と表記されている物理的に観測される電荷は“繰り込まれた電荷”(renormalized charge) と呼ばれる．これは $m_{\text{bare}}+\delta m$ が繰り込まれた質量と呼ばれることに比せられる．歴史的には，陽電子が発見された後に開催された最初のSolvay(ソルヴェイ)会議において，P. A. M. Dirac は観測される電荷量が仮想的な電子-陽電子対の生成・消滅の効果のために，裸の電荷に比べて，その ~ 1/137 程度は低下しているはずだと論じた．

この段階で，電荷は2つの電子間相互作用の強さによって測定されるだけでなく，“外場”に対する電子の応答によっても測定されることを論じてもよい．この場合も前の議論と同様に，裸の電子電荷に対する適正な補正因子は $\sqrt{1-C}$ である．このことを Coulombポテンシャルの場合について見るには，Mott散乱のS行列要素(4.65)が，真空偏極グラフ (p.354, 図4.26参照) によって次のように修正されることに注意すればよい．

$$
\begin{aligned}
-\frac{Ze^2\bar{u}'\gamma_4 u}{|\mathbf{q}|^2} &\to -\frac{Ze^2\bar{u}'\gamma_4 u}{|\mathbf{q}|^2}+\frac{(-e)(\bar{u}'\gamma_\mu u)(-iC-iq^2\Pi^f)(q^2\delta_{\mu4}-q_\mu q_4)}{iq^2}\left(\frac{Ze}{|\mathbf{q}|^2}\right)\\
&= -\frac{Ze^2(1-C)\bar{u}'\gamma_4 u}{|\mathbf{q}|^2}-q^2\Pi^f(q^2)\left(-\frac{Ze^2\bar{u}'\gamma_4 u}{|\mathbf{q}|^2}\right) \qquad (4.429)
\end{aligned}
$$

上式では $q^2=|\mathbf{q}|^2$ を利用し，また各項に共通する因子 $-2\pi i\delta(E-E')\sqrt{(m/EV)}\sqrt{(m/E'V)}$ を省いた．式(4.429) を見ると，$(-Ze)$ と e が“両方とも” $\sqrt{1-C}$ で補正されているものと解釈できる．もちろんこれと等価なことであるが，電子電荷が $\sqrt{1-C}$ によって補正され，同時に外部Coulombポテンシャルが $\sqrt{1-C}$ によって補正されていると捉えてもよい．興味深いことに，このように実効的な原子核Coulomb電荷が減少して見えることは，3.9節において定性的に与えた真空偏極の議論と整合する．すなわち仮想的な電子-陽電子の雲は，原子核の正電荷の一部を中和する．

次に Π^f の物理的な意味を理解するために，今度は式(4.429) の最後の行の第2項に注目してみよう．$|\mathbf{q}|^2$ が大きくない場合には，この項は Π^f の近似式(4.424) によって $-Ze^2\alpha/(15\pi m^2)$ となる．原子核と電子 (非相対論的であると仮定する) の間の実効的なポテンシャルは，式(4.429) の3次元Fourier変換なので，Coulomb相互作用が次のように修正されることが分かる．

$$-\frac{Ze_{\text{bare}}^2}{4\pi r} \to -\frac{Ze_{\text{bare}}^2(1-C)}{4\pi r} - \frac{Ze_{\text{bare}}^2\alpha_{\text{bare}}}{15\pi m^2}\delta^{(3)}(\mathbf{x})$$

$$= -\frac{Ze_{\text{obs}}^2}{4\pi r} - \frac{Ze_{\text{obs}}^2\alpha_{\text{obs}}}{15\pi m^2}\delta^{(3)}(\mathbf{x}) + 0(\alpha_{\text{obs}}^2 Ze_{\text{obs}}^2) \tag{4.430}$$

運動量の移行が非常に小さい散乱を電子が受ける場合，電子が“経験する”ポテンシャルは通常の $1/r$ の形である．運動量の移行が小さければ，散乱はポテンシャルの外側だけに対して敏感だからである．この場合には電荷の大きさが普遍的な因子によって減少するだけであり，あらゆる過程において共通する電荷の繰り込みだけを考慮すればよい (式(4.428))．他方，3.9節に与えた直観的な真空偏極の効果の議論によれば，運動量の移行を大きくした場合，あるいは等価的に衝突径数を小さくした場合には，電子は偏極した雲の内部にまで侵入するようになり，雲による遮蔽効果は弱まるので，実効的な相互作用は強くなる．式(4.430) のデルタ関数の項は，このように構造に依存する効果を表している．このデルタ関数の項に付いている符号が，引力相互作用を意味することに注意してもらいたい (3.9節の単純な議論と整合している)．この項は水素原子において $2s_{1/2}$ と $2p_{1/2}$ のエネルギー準位差を生じる一因となることを指摘しておく．デルタ関数のポテンシャルは $l \neq 0$ ならばゼロであり，$l = 0$ のときに有限になるからである．定性的には，

$$\Delta E_{nl} = -\frac{\alpha e^2}{15\pi m^2}|\psi(0)|^2 = -\frac{8\alpha^3}{15\pi n^3}Ry_\infty \delta_{l0} \tag{4.431}$$

となる．この式は1935年に E. A. Uehling（ユーリン）によって与えられた．式(4.431) のエネルギーずれは，全Lamb（ラム）シフト +1058 MHz において −27 MHz の寄与を持つ．Lamb シフトの実験値と理論値が 1 MHz の数分の 1 までの精度で一致していることを考えると，“真空偏極の効果”として予見される性質を，現実の物理現象として認識しなければならないことが分かる．形式的に発散している定数 C は直接に観測可能な量ではないこと (観測される電荷の定義において発散は打ち消されている) を強調しておく．我々はこのような困難を回避して，物理的に観測可能な Uehling効果のような有限量を算出することができるのである．

もちろん真空偏極の効果は，仮想的な $\mu^-\mu^+$ 対（つい），$\pi^-\pi^+$ 対，$\bar{\text{p}}\text{p}$ 対によっても生じ得る．しかし q^2 が小さいときの $\Pi^f(q^2)$ は荷電粒子の質量の自乗に反比例するので，これらの系における真空偏極の寄与は重要ではない．たとえば $\mu^-\mu^+$ 対による真空偏極の効果は e^-e^+ 対による効果の $1/(205)^2$ に過ぎない．“ミュー粒子原子（ミューオニック・アトム）”(軌道電子のひとつが負電荷のミュー粒子に置き換わった原子) における Uehling効果も，主として仮想的な e^-e^+ 対によるものであって，$\mu^-\mu^+$ 対によるものではない．重元素のミュー粒子原子から放射されるX線エネルギーの測定 (V. Fitch, J. Rainwater 等

によって行われた）から，実際にそのような偏極項の影響が確認されていることを付言しておく．低エネルギーの陽子-陽子散乱に対する電磁的補正においても，真空偏極の効果は重要な役割を演じている．

Π^f の式(4.423) に戻ってみよう．$m^2 \to m^2 - i\epsilon$ の手続きに従って，$\Pi(q^2)$ が次のような虚部を持つことを即座に示すことができる．

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,\Pi(q^2) &= q^2\mathrm{Im}\,\Pi^f(q^2)\\ &= \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 dz\, z(1-z)\pi\theta\left[z(1-z)+\frac{m^2}{q^2}\right]\\ &= \frac{\alpha}{3}\left[1-\frac{2m^2}{q^2}\right]\sqrt{1+\frac{4m^2}{q^2}}\,\theta(-q^2-4m^2)\end{aligned} \tag{4.432}$$

すなわち偏極応答テンソルは $q^2 < -4m^2$ において複素数になる．読者は問題4.5 (p.378) を解くと，式(4.432) は $2|a/2|^2\omega^2$ を除いて外部の３次元ベクトルポテンシャル $\mathbf{A} = (0, 0, a\cos\omega t)$, $\omega > 2m$ が電子-陽電子対を単位体積・単位時間あたりに生成する確率に等しいことが分かる．ここでは ω^2 が $-q^2$ にあたる．この対応関係は偶然のものではない．この事情を理解するために，4.2節で示したユニタリー性の関係式(4.45c) を利用する．外場 $\mathbf{A} = (0, 0, a\cos\omega t)$ の下で始状態と終状態を真空状態と置いてみると，式(4.45c) は次のようになる．

$$S_{ii}^{(2)*} + S_{ii}^{(2)} = -\sum_n |S_{ni}^{(1)}|^2 \tag{4.433}$$

i はここでは真空状態を表す．$S_{ii}^{(2)}$ は，真空状態が２つの結節点（ヴァーテックス）を経て，真空状態に戻る振幅である．しかし読者が問題4.16 (p.381) で扱う運動学的な因子を除き，$S_{ii}^{(2)}$ は本質的に $-i\Pi(q^2)$ を $q^2 = -\omega^2$ において評価したものに他ならない．真空が電子-陽電子対を生じて“中間”状態へ移行することが，２回めの電磁的相互作用によって真空に戻れる唯一の方法だからである．このことは式(4.433) の左辺が本質的に $\Pi(q^2)$ の虚部の符号を変えたものであることを意味する．したがって式(4.433) の右辺に現れている $S_{ni}^{(1)}$ は外場が電子-陽電子対を生成する振幅を表し，状態 n は必然的にひと組の電子-陽電子対が存在する状態だけを表すことになる．すなわち“１次の”S行列によって真空と結びつけることができる状態は e^-e^+ 状態以外にはない．$S_{ii}^{(2)}$ と $S_{ni}^{(1)}$ をグラフで表すと図4.28 のようになる．まとめると，ユニタリー性の関係式(4.433) は，$\Pi(q^2)$ の虚部が本質的に対生成確率に比例することを含意していると言える．この関係こそまさに式(4.432) と問題4-5 の比較から推定される関係である．

偏極応答テンソル $\Pi_{\mu\nu}$ の本質が，外場とそれに誘起される電荷電流密度を関係づける比例定数であることは既に論じた．この観点からすると $\Pi(q^2)$ を真空の誘電率と



図4.28 式(4.433) におけるS行列要素.

見なすことができる. $q^2 < -4m^2$ において誘電率が複素数になることは物理的に予想されることである. この条件になると, 実の電子-陽電子対生成に伴い Maxwell場がエネルギーを失う過程が発生するようになる.

我々は$\Pi(q^2)$ の実部と虚部の間の重要な関係を論ずべきところに来た. まず $\tilde{A}_\nu^{(e)}(q)$ が外部ポテンシャルの Fourier変換を表すものとすると, $e^2\Pi_{\mu\nu}(q)\tilde{A}_\nu^{(e)}(q)$ は外部ポテンシャルによって誘起された4元電流の Fourier変換にあたることを思い出そう. 言い換えると $\Pi_{\mu\nu}(q)\tilde{A}_\nu^{(e)}(q)$ は外場に対する真空の応答を表している. この応答は外場の印加と因果的に関係づけられているはずなので, 光の散乱に関する Kramers(クラマース)-Kronig(クローニッヒ)の関係 (分散関係. 式(2.203)-(2.209)を参照) を導出した際と全く同様の議論を繰り返すことができる. 特に $\delta(t)$ の時間依存性を持つ3次元ベクトルポテンシャルのパルスの印加を考えた場合, "因果律[53]" から次式が要請される.

$$\int \Pi(q^2)\Big|_{q^2=-\omega^2} e^{-i\omega t} d\omega = 0 \quad \text{for} \quad t < 0 \tag{4.434}$$

上式は $\Pi(q^2)$ の分散関係を, 変数 $\omega = \sqrt{-q^2}$ に関して次のように書けることを含意する.

$$\mathrm{Re}\,\Pi(q^2)\Big|_{q^2=-\omega^2} = \frac{1}{\pi}\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega'}{(\omega'-\omega)}\mathrm{Im}\,\Pi(q'^2)\Big|_{q'^2=-\omega'^2} \tag{4.435}$$

これを, 変数 ω^2 を用いた形に書き直す.

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,\Pi(q^2)\Big|_{q^2=-\omega^2} &= \frac{1}{\pi}\mathrm{Pr}\int_0^{\infty} d\omega'\left(\frac{1}{\omega'-\omega}+\frac{1}{\omega'+\omega}\right)\mathrm{Im}\,\Pi(q^2)\Big|_{q'^2=-\omega^2}\\ &= \frac{1}{\pi}\mathrm{Pr}\int_0^{\infty}\frac{d(\omega'^2)}{\omega'^2-\omega^2}\mathrm{Im}\,\Pi(q'^2)\Big|_{q'^2=-\omega^2}\end{aligned} \tag{4.436}$$

[53] Heisenberg表示の電子場の演算子を採用すると, $\Pi(q^2)$ の Fourier変換がゼロになることと因果律の関係を, より厳密に論じることができる. Källén (1958), pp.279-285 を参照.

Π の虚部は $\omega'^2 < 4m^2$ においてゼロになるので，最終的な結果は次のようになる．

$$\mathrm{Re}\,\Pi(q^2) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Pr}\!\int_{4m^2}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\,\Pi(-s)}{s+q^2}\,ds \tag{4.437}$$

ここで再び問題4-5 (p.378) の外部ポテンシャルの下で $\omega^2 = s$ と置けば，$\mathrm{Im}\,\Pi(-s)$ の本質が，真空に対の生成する確率であることを注意しておく．しかしながら式(4.437) の左辺にある $\Pi(q^2)$ は，電荷の繰り込みや Uehling効果などの，より複雑な現象に関わる性質も含んでいる．これらの (基本的ではない) 真空偏極を計算するためにも，最も基本的な相対論的量子力学の問題のひとつである問題4-5 を解けば充分である．そうすれば分散関係(4.437) を利用して $\mathrm{Re}\,\Pi(q^2)$ までを評価できる．このユニタリー性と因果律に基づく強力な方法は，主として G. Källén（チェレン）や R. N. Euwema and J. A. Wheeler によって提唱された．

分散関係のアプローチの有用性を詳しく見るために，電荷の繰り込みに関わる定数 C を計算してみる．この場合は式(4.437) において $q^2 = 0$ と設定すれば，繰り込み定数に関する和則 (積分則) が次のように得られる．

$$C = \Pi(0) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Pr}\!\int_{4m^2}^{\infty} ds\,\frac{\mathrm{Im}\,\Pi(-s)}{s} \tag{4.438}$$

読者は問題4-16 (p.381) において，ユニタリー性の関係式(4.433) と問題4-5 (p.378) から式(4.432) を証明することになるが，この式によれば，

$$\lim_{s\to\infty} \mathrm{Im}\,\Pi(-s) = \lim_{s\to\infty}\left[-s\,\mathrm{Im}\,\Pi^f(-s)\right] = \frac{\alpha}{3} \tag{4.439}$$

である．この漸近値を式(4.438) に代入すると，C は切断エネルギーの自乗 $s_{\max}$ に依存して対数的に発散することが見て取れる．

$$C = \frac{\alpha}{3\pi}\log\left(\frac{s_{\max}}{m^2}\right) + \text{有限な定数} \tag{4.440}$$

発散する項と一緒に表れている有限な定数は物理的な意味を持たないので，式(4.440) は，はるかに複雑な積分を評価して得た式(4.422) と正確に一致している．また，このアプローチは直接的に (かつ厳密に) 電荷の繰り込みの符号の説明を与えることにも注意してもらいたい．定数 C は“正”でなければならないが，それは対生成の確率が正定値だからである．その結果として，裸の電荷 (もしくは電磁ポテンシャル) に対して生じる補正因子 $\sqrt{1-C}$ は１以下である．式(4.437) の代わりに，$\Pi(q^2)$ 自体ではなく $\Pi(q^2)/\omega$ に対して通例の解析的な議論を適用して“１回減却 (once-subtracted) 分散関係”を求めてみることも教育的である．この場合は分散積分が収束し，Uehling 効果を生じる $\Pi(q^2)$ の有限部分 (前に $q^2\Pi^f$ と書いたもの) が得られる．これは練習問題とする (p.381, 問題4-16).

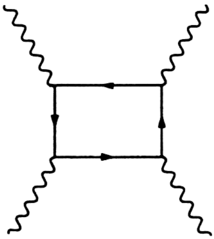


図4.29 光子-光子散乱.

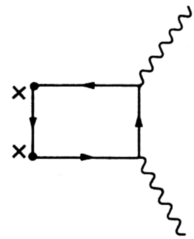


図4.30 Delbrück散乱.

真空偏極の話題を終える前に，自由な輻射場の真空への影響について，いくつか注意を与えておくのがよいだろう．$A_\mu^{(\mathrm{rad})}$ が古典的な自由輻射場であり，D'Alembertian（ダランベルシャン）方程式 (源の項は含まない) と Lorentz条件を満たすものとすると，

$$(q^2\delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu)\tilde{A}_\nu^{(\mathrm{rad})} = 0 \tag{4.441}$$

なので，4元電流 $e^2\Pi_{\mu\nu}\tilde{A}_\nu^{(\mathrm{rad})}$ が誘起されることはない．したがって自由な光子，すなわち空っぽの空間内を伝播する電磁場に関しては，電磁場に線形依存する真空偏極はない．このことは我々の常識的な真空の概念に一致する．しかし非線形な効果までを考慮すると，偏極がないとは言えなくなる．2つの光子ビームは図4.29 のような“矩形ダイヤグラム”(square diagram) の過程によって相互の散乱が可能である．このことを最初に論じたのはおそらく H. Euler（オイラー）だが[54]，この光による光の散乱断面積は $\omega \sim m$ において約 $4\times10^{-31}\ \mathrm{cm}^2$ ($4\times10^{-35}\ \mathrm{m}^2$) と推定され，実験的に観測できないほど小さい．図4.29 における光子間相互作用の結節点（ヴァーテックス）のうちの2つを原子核 Coulombポテンシャルとの相互作用に置き換えると，Delbrück（デルブリュック）散乱として知られる過程のダイヤグラムになる (この過程を理論的に予想した M. Delbrück に因む)．これを図4.30 に示す．Delbrück散乱の角度分布は鋭い前方ピークによって特徴づけられるが，R. R. Wilson によって実験的にも Delbrück散乱が確認された．

輻射補正 繰り込み定数 $1-C$ による補正を，共変な光子伝播関数に対する補正と見ても，$\alpha = e^2/4\pi$ に対する補正と見てもよいことには既に言及した．電子伝播関数に対する補正因子 $1-B$ は $1-C$ と類似関係にあるので，この因子も電荷に対する補正と読み換えることが可能かどうかに関心が持たれる．これに答えるために，たと

[54] 図4.29 以外に，光子の相互作用を置き換えることによって得られる5つのダイヤグラムがある．各ダイヤグラムの振幅は対数的に発散するが，和をとると有限になることが示される．

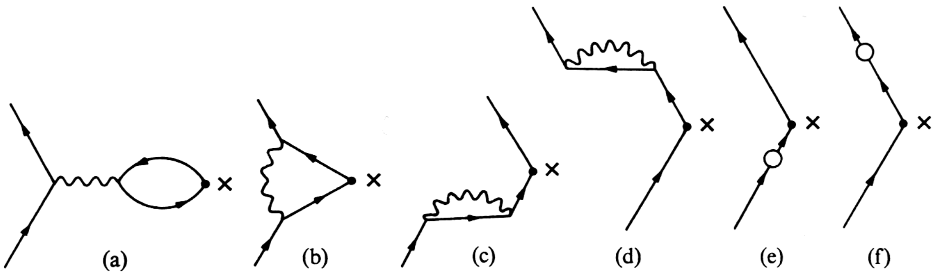


図4.31 外場による電子散乱過程への輻射補正.

えば特定の外部ポテンシャル問題に対して，図4.2(a) (p.245) の1次散乱振幅において系統的に可能なすべての補正を考える必要がある．元の1次の振幅に対して e^2 倍の次数を持つダイヤグラムは図4.31に示すように全部で6つある．これらをまとめて電子の外場散乱に対する“輻射補正”(radiative correction) と呼ぶ．最初の (a) は既に詳しく論じた真空偏極である．(b) は“結節点補正(ヴァーテックス)”と呼ばれるが，これについてはすぐ後で詳しく論じる．(c) と (d) はそれぞれ始状態の電子線と終状態の電子線に対する自己エネルギー補正である．(e) と (f) は我々が電子の観測質量 (繰り込まれた質量) を用いる場合に，裸の電子質量とのずれの影響を相殺するために必要とされる (p.347, 図4.23の議論を思い出すこと)．(e) および (f) が定数 A を生じる (c) および (d) と相殺することは明らかである．

図4.31(c) を詳しく見てみよう．(e) によって相殺される質量補正を除くと，(c) は入射電子を表す自由粒子スピノルに対して，次の修正を施したものと見られる (式(4.386)参照).

$$u^{(s)}(\mathbf{p}) \to u^{(s)}(\mathbf{p}) + \frac{1}{i(i\gamma\cdot p+m)}(-i)\Big[(i\gamma\cdot p+m)B + (i\gamma\cdot p+m)^2\,\Sigma^f(p)\Big]u^{(s)}(\mathbf{p}) \tag{4.442}$$

$u^{(s)}(\mathbf{p})$ は自由粒子スピノルの方程式(3.105) を満たすので，$\Sigma^f(p)$ の項は省くことができる．次に，もし $(i\gamma\cdot p+m)$ と $1/(i\gamma\cdot p+m)$ を相殺できるならば，入射スピノルに対する補正因子 $1-B$ が得られるけれども，$(i\gamma\cdot p+m)$ を $u^{(s)}(\mathbf{p})$ に作用させるとゼロになることを考えると，この措置は不定計算となるので正当化できない．注意深い取扱い (無限の過去と無限の未来において相互作用項を断熱的に消失させる F. J. Dyson の論法) によると，図4.31(c) において生じる正しい補正因子は $1-B$

ではなく $1-(B/2)$ である．この結果は，粗く言えば次のように捉えられる．まず $S_{\mathrm{F}}(p)$ と表されるような内線に対する補正としては $1-B$ が得られることを思い出そう (式(4.401))．このときの電子伝播関数 (Fourier変換が $S_{\mathrm{F}}(p)$) である) は電子スピノルに関して“双1次”(bilinear) である．これに対して電子の外線において，電子スピノルは“1次”で現れる．したがって図4.31(c) の自己エネルギー相互作用による適正な補正因子は，

$$\sqrt{1-B}=1-\frac{1}{2}B+0(\alpha^2) \tag{4.443}$$

と推定される．同様の議論が図4.31(d) の過程についても成り立つ[55]．

光子伝播関数の場合と同様に，電子伝播に関わるこれらの補正因子を電荷に対する補正 (繰り込み) と見ることも可能である．その場合には，図4.31 の (c) と (d) の過程により，

$$e \;\rightarrow\; \left[1-\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}B+0(\alpha^2)\right]e \approx (1-B)e \tag{4.444}$$

となる．

次に図4.31(b) によって表される結節点(ヴァーテックス)補正に注意を向けてみよう．Feynman規則によれば，このダイヤグラムは外部ポテンシャルとの1次相互作用を表す γ_μ 結節点(ヴァーテックス)を次のように修正する．

$$-e\gamma_\mu \;\rightarrow\; -e\left[\gamma_\mu+\Lambda_\mu(p',p)\right] \tag{4.445}$$

上式の結節点(ヴァーテックス)補正関数 $\Lambda_\mu(p',p)$ は，次のように与えられる 4×4 行列である．

$$\begin{aligned}\Lambda_\mu(p',p)=(-e^2)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{i(k^2-i\epsilon)}\\ \times\gamma_\nu\left\{\frac{-i\gamma\cdot(p'-k)+m}{i[(p'-k)^2+m^2-i\epsilon]}\right\}\gamma_\mu\left\{\frac{-i\gamma\cdot(p-k)+m}{i[(p-k)^2+m^2-i\epsilon]}\right\}\gamma_\nu\end{aligned} \tag{4.446}$$

$\Lambda_\mu(p',p)$ を自由粒子スピノル $\bar{u}'$ (左側) と u (右側) で挟む場合には，次のように書ける．

$$\Lambda_\mu(p',p)\Big|_{i\gamma\cdot p'=-m,\,i\gamma\cdot p=-m}=L\gamma_\mu+\Lambda_\mu^f(p',p) \tag{4.447}$$

---

55) 波動関数の繰り込みの問題全体を最も曖昧さのない方法で扱うためには，“reduction technique”と呼ばれる技法を用いる必要があるが，それは本書の扱う範囲外の事項である．たとえば Gasiorowicz (1966) の第13章を参照．

上式の L と $\Lambda_\mu^f(p',p)$ は "一意的に" 定義される.

$$\lim_{p'\to p} \bar{u}'\Lambda_\mu(p',p)u = L\bar{u}'\gamma_\mu u \tag{4.448a}$$

$$\Lambda_\mu^f(p',p) = \left[\Lambda_\mu(p',p) - \Lambda_\mu(p,p)\right]\Big|_{i\gamma\cdot p'=-m,\, i\gamma\cdot p=-m} \tag{4.448b}$$

読者は自由粒子スピノルで挟んである $\lim_{p'\to p}\Lambda_\mu(p',p)$ が γ_μ だけによって決まり p_μ に依存しないことを疑問に思うかも知れない. その理由は, 自由粒子スピノルに対する Gordon分解(3.203) と類似の手続きを利用すると, 常に任意の p_μ 依存性を表せることに因る.

$$(p'+p)_\mu \bar{u}'u = 2im\bar{u}'\gamma_\mu u + i(p'-p)_\nu \bar{u}'\sigma_{\mu\nu}u \tag{4.449}$$

真空偏極との関係において既に説明したように, 我々が物理的に観測する電荷は, 運動量の移行が非常に小さい電子の散乱 ($p'\to p$) から決定される. したがって図4.31(b) によって生じる電荷の補正因子 (繰り込み因子) は $1+L$ である[56].

電荷に帰することのできる補正を集約して各因子をまとめると, 補正全体は次のように表される.

$$e \;\to\; \sqrt{1-C}(1-B)(1+L)e \tag{4.450}$$

$\sqrt{1-C}$ は図4.31 の (a) の真空偏極グラフに起因し, $1-B$ は (c) と (d) に起因し, $1+L$ は (b) に起因している. これらの因子はそれぞれ光子伝播関数の繰り込み, 電子伝播関数の繰り込み, および結節点(ヴァーテックス)補正に対応する. しかしながら量子電磁力学では, 予想し難いけれども注目すべきことが起こる. 定数 B と定数 L が等しくなるのである. この重要な恒等関係を証明するために, まず式(4.385) と式(4.446) を次のように書き直す.

$$\Sigma(p) = ie^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}D_{\rm F}(k)\gamma_\nu S_{\rm F}(p-k)\gamma_\nu \tag{4.451}$$

$$\Lambda_\mu(p',p) = e^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}D_{\rm F}(k)\gamma_\nu S_{\rm F}(p'-k)\gamma_\mu S_{\rm F}(p-k)\gamma_\nu \tag{4.452}$$

ここで, 一般的に次式が成立することに注意する.

$$\frac{\partial S_{\rm F}(p)}{\partial p_\mu} = S_{\rm F}(p)\gamma_\mu S_{\rm F}(p) \tag{4.453}$$

上式は,

$$S_{\rm F}(p)S_{\rm F}^{-1}(p) = 1 \tag{4.454}$$

---

[56] 結節点補正を施した電荷と裸の電荷の "比" は一般的に $1/Z_1$ と書かれる. e^2 の次数までで $L = (1/Z_1) - 1$ である.

の両辺を p_μ で微分して，

$$\frac{\partial S_{\rm F}}{\partial p_\mu} S_{\rm F}^{-1}(p) + S_{\rm F}(p) \frac{\partial}{\partial p_\mu} \Big[i(i\gamma \cdot p + m) \Big] = 0 \tag{4.455}$$

に右から $S_{\rm F}(p)$ を掛けることで証明される．式(4.453) が意味するところは，電子の内線に運動量の移行を伴わない γ_μ 結節点(ヴァーテックス)を挿入することは，電子伝播関数に対して p_μ に関する微分を施すことと本質的に等価だということである．この重要な恒等式を用いて $\lim_{p' \to p} \Lambda_\mu(p', p)$ を書き直すことができる．

$$\begin{aligned} L\gamma_\mu &= \lim_{p' \to p} \Lambda_\mu(p', p)\Big|_{i\gamma\cdot p' = -m,\, i\gamma \cdot p = -m} \\ &= e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} D_{\rm F}(k) \gamma_\nu \frac{\partial S_{\rm F}(p-k)}{\partial (p-k)_\mu} \gamma_\nu \\ &= e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} D_{\rm F}(k) \gamma_\nu \frac{\partial S_{\rm F}(p-k)}{\partial p_\mu} \gamma_\nu \end{aligned} \tag{4.456}$$

一方，式(4.386) による B の定義と，$\Sigma(p)$ の式(4.451) から次式が得られる．

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(s')}(\mathbf{p}) B \gamma_\mu u^{(s)}(\mathbf{p}) &= \bar{u}^{(s')}(\mathbf{p}) \left(-i \frac{\partial \Sigma}{\partial p_\mu} \right) u^{(s)}(\mathbf{p}) \\ &= \bar{u}^{(s')}(\mathbf{p}) \left[e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} D_{\rm F}(k) \gamma_\nu \frac{\partial S_{\rm F}(p-k)}{\partial p_\mu} \gamma_\nu \right] u^{(s)}(\mathbf{p}) \\ &= \bar{u}^{(s')}(\mathbf{p}) L \gamma_\mu u^{(s)}(\mathbf{p}) \end{aligned} \tag{4.457}$$

したがって，恒等関係，

$$B = L \tag{4.458}$$

が確認された．この結果は次のことを含意する．

$$(1 - B)(1 + L) = 1 + 0(\alpha^2) \tag{4.459}$$

よって，α の 1 次までにおいて，式(4.450) は，

$$e \ \to \ \sqrt{1 - C} e \tag{4.460}$$

となる．すなわち電荷の繰り込みは，光子場への真空偏極の影響“だけ”によって決まり，電子場や結節点(ヴァーテックス)への補正には依らない．これは電荷に対する正味の補正因子が荷電Dirac粒子の“種類”には依存しないことを意味するので，都合のよい結果である．仮にこの関係が無ければ，B や L はフェルミオンの質量に依存するために (切断 Λ にも依る)，電子の電荷とミュー粒子の電荷が等しいという保証はできないこと

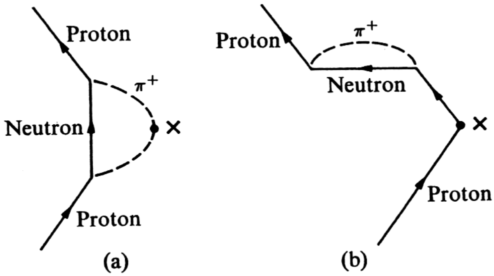


図4.32　核子の中間子相互作用による輻射補正.

になってしまうであろう．恒等関係(4.458) に基づく電荷補正則(4.460) は，電子とミュー粒子の裸の電荷が互いに等しいならば，両方の電荷補正に同じ C が関わることになり，繰り込まれた電荷も互いに等しくなることを意味している．J. C. Ward(ウォード)が示したように，電荷の繰り込みが光子場の繰り込みだけによって決まるという命題は，摂動の“すべての次数”にまで一般化できる．恒等関係(4.458) や，より高次においてこれに相当する式は Ward恒等式 (Ward identity) と呼ばれている[57]．

式(4.459) のようなフェルミオン伝播の補正と結節点(ヴァーテックス)補正の相殺機構は，中間子交換相互作用に与る陽子の電荷にも働くものと想定される．核子の波動関数に対する繰り込みの主要な部分は，陽子が仮想 π 中間子を (その他の重い中間子も同様であるが) 放出し再吸収する過程から生じる．この場合，たとえば図4.32(a) のようなダイヤグラムを図4.32(b) のようなダイヤグラムと併せて考慮すると，陽子の電荷が変更されないことを証明する必要がある．実験的に確認されている陽子の電荷は，電子の電荷に対して $1/10^{22}$ の精度まで正確に一致している．

電子とミュー粒子の“純粋な電磁力学”に戻って，式(4.448b) において定義した $\Lambda_\mu^f(p', p)$ の物理的な含意を調べておく必要がある．付録E の技法を用いて直接的に Λ_μ^f を計算すると，$|k^2|$ が高いところで“収束する”ことが示される．しかし $|k|^2$ が“低い”領域では $|k|^2 \to 0$ において積分が対数的に発散する．これが“赤外発散”(infrared catastrophe) の一例である．この類の困難を共変な形で回避する方法としては (Feynman の流儀によれば) 一時的に非常に小さいけれども有限な質量を光子に

57) 繰り込み因子の記号 Z_1, Z_2, Z_3 を用いると，Ward恒等式は $Z_1 = Z_2$，電荷の繰り込みは $e_{\mathrm{obs}} = \sqrt{Z_3}\, e_{\mathrm{bare}}$ と表される．(以下訳註) 式(4.458) よりも，むしろ定数同士の等式の形にする前の結節点関数とフェルミオン自己エネルギーの導関数の関係式 $\Lambda_\mu(p, p) = -i\partial\Sigma(p)/\partial p_\mu$ を“Ward恒等式”と呼ぶ場合が多い．式(4.456) - (4.457) を参照．

付与すればよい．すなわち式(4.446)に現れる光子伝播関数を，次のように修正する．

$$\frac{1}{i(k^2-i\epsilon)} \rightarrow \frac{1}{i(k^2+\lambda_{\min}^2-i\epsilon)} \tag{4.461}$$

$\lambda_{\min}$ は光子の“質量”である．このように修正を施すと，エネルギーの非常に低い光子 ($\omega \lesssim \lambda_{\min}$) が放射・吸収されることはなくなる．この人為的な手続きの物理的な含意については，本節の後の方で言及する．$q=p'-p$ が小さければ，正味の結果として $\Lambda_\mu^f(p',p)$ は次のように表される．

$$\Lambda_\mu^f(p',p) = -\left[\frac{\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}\left(\log\frac{m}{\lambda_{\min}}-\frac{3}{8}\right)\right]\gamma_\mu + \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)\left(\frac{1}{2m}\right)q_\nu\sigma_{\nu\mu} \tag{4.462}$$

付録Eにおいて上式の導出方法を論じ，$q_\nu\sigma_{\nu\mu}$ の係数が実際に $(\alpha/2\pi)(1/2m)$ になることを示すが，ここで指摘しておくべき要点は，定数 L が定数 B によって相殺されることを考え合わせるならば，観測されるべき効果は“高い” $|k^2|$ における Λ_μ の発散には全く依存しないということである．

以上をまとめると，q が小さい場合，電荷の繰り込みを除いて，図4.31の(a)から(f)までのすべての輻射補正により1次のS行列(4.64)は次のように修正される．

$$\begin{aligned}
&-e\sqrt{\left(\frac{m}{EV}\right)\left(\frac{m}{E'V}\right)}\,\bar{u}'\gamma_\mu u\tilde{A}_\mu^{(e)}(q) \\
&\rightarrow -e\sqrt{\left(\frac{m}{EV}\right)\left(\frac{m}{E'V}\right)}\,\bar{u}'\left\{\gamma_\mu\left[1-\frac{\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}\left(\log\frac{m}{\lambda_{\min}}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)\right]\right. \\
&\qquad\qquad \left. +\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)\left(\frac{1}{2m}\right)\sigma_{\nu\mu}q_\nu\right\}u\tilde{A}_\mu^{(e)}(q)
\end{aligned} \tag{4.463}$$

ここで $q=p'-p$ であり，外部ポテンシャルの Fourier 変換は，

$$\tilde{A}_\mu^{(e)}(q) = \int d^4x\, e^{-i(p'-p)\cdot x}A_\mu^{(e)}(x) \tag{4.464}$$

と定義してある．$-(\alpha/3\pi)(q^2/m^2)$ に掛かる因子の中の $-\frac{1}{5}$ は，真空偏極グラフから生じている(式(4.424)および式(4.429)を参照)．

まず，式(4.463)の最後の項の物理的な意味について述べておく．次の相互作用ハミルトニアンを考えてみよう．

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\text{int}} &= -\frac{e\kappa}{2m}\left[\frac{1}{2}F_{\nu\mu}^{(e)}\bar{\psi}\sigma_{\nu\mu}\psi\right] \\
&= -\frac{e\kappa}{2m}\frac{\partial A_\mu^{(e)}}{\partial x_\nu}\bar{\psi}\sigma_{\nu\mu}\psi
\end{aligned} \tag{4.465}$$

電子が相互作用(4.465) によって散乱を受ける１次のＳ行列要素は容易に計算できる.

$$\begin{aligned}S_{fi} &= \frac{ie\kappa}{2m}\sqrt{\left(\frac{m}{EV}\right)\left(\frac{m}{E'V}\right)}\bar{u}'\sigma_{\nu\mu}u\int d^4x\, e^{-i(p'-p)\cdot x}\frac{\partial A_\mu^{(e)}}{\partial x_\nu} \\ &= \frac{ie\kappa}{2m}\sqrt{\left(\frac{m}{EV}\right)\left(\frac{m}{E'V}\right)}\bar{u}'\sigma_{\nu\mu}u(+iq_\nu)\int d^4x A_\mu^{(e)}e^{-iq\cdot x} \\ &= -\frac{e\kappa}{2m}\sqrt{\left(\frac{m}{EV}\right)\left(\frac{m}{E'V}\right)}\bar{u}'\sigma_{\nu\mu}uq_\nu\tilde{A}_\mu^{(e)}(q) \end{aligned} \qquad (4.466)$$

上式は，κ を $(\alpha/2\pi)$ と置くと，式(4.463) の最後の項に等しい．一方，我々は3.5節において相互作用(4.465) と通常の相互作用 $ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu^{(e)}$ を一緒に扱うと，電子の全磁気能率が $(1+\kappa)(e/2m)$ となることを既に示している (式(3.212)参照)．したがって上述のことは，図4.31(b) (p.365) によって表される結節点(ヴァーテックス)補正の結果として，電子の全磁気能率が次のように与えられることを意味する[58].

$$\mu_{\rm el} = \left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)\left(\frac{e}{2m}\right) \qquad (4.467)$$

上式は 1948年に J. Schwinger によって示されたが，その後に P. Kusch(クッシュ) が電子の異常磁気能率の精密な測定を行った．続いて電子の磁気能率の４次補正 (α^2 補正) が C. Sommerfeld と A. Petermann によって計算された．この次数における磁気能率の理論値は，

$$\begin{aligned}\mu_{\rm el} &= \left[1+\frac{\alpha}{2\pi}-0.328\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2\right]\frac{e}{2m} \\ &= 1.0011596\left(\frac{e}{2m}\right)\end{aligned} \qquad (4.468)$$

であるが，これは H. R. Crane とその共同研究者による最近の実験値 $\left[1+(\alpha/2\pi)-(0.327\pm0.005)(\alpha/\pi)^2\right](e/2m)$ とよく一致している.

ここで Feynman が赤外発散の問題を扱った方法，すなわち式(4.461) において虚構的な光子質量 $\lambda_{\rm min}$ を導入したことの意味について言及しておく．これに対して“物理的に敏感な問題”の具体例として，非相対論的なエネルギー領域における小角度の Mott 散乱において $\lambda_{\rm min}$ の影響がどのように消失するかを見てみよう．$\tilde{A}_\mu^{(e)}(q)$ を式(4.66) によって与え，Ｓ行列(4.463) を用いて弾性散乱の断面積を $(Z\alpha)^2\alpha$ の次数まで計算すると，次のようになる.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{(0)}\left[1-\frac{2\alpha}{3\pi m^2}|\mathbf{q}|^2\log\left(\frac{m}{\lambda_{\rm min}}\right)+[\lambda_{\rm min}\text{に依存しない項}]\right] \qquad (4.469)$$

[58] 式(4.465) において $\kappa=\alpha/2\pi$ と置いたものを“基本的な相互作用”とは見なせないことを強調しておく．基本的な相互作用 $ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu$ の高次の効果として，式(4.465) の形の効果が現れる.

$(d\sigma/d\Omega)^{(0)}$ は4.3節で計算した，補正を施していない最低次のMott断面積である．他方，問題4-10 (p.379) によれば，非相対論定な電子が単位エネルギーあたりに極軟光子を制動放射する断面積は次のように書かれる．

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega_{\mathbf{p}'}d\omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{(0)} \frac{2\alpha|\mathbf{q}|^2}{3\pi m^2 \omega} \tag{4.470}$$

因子 $1/\omega$ の影響により，制動放射の断面積を光子エネルギーで積分すると，ω が小さい領域において対数的に発散する．仮に光子に有限の質量を持たせることができれば，発散はなくなる．エネルギーが $\omega = \lambda_{\min}$ と $\omega = \omega_0$ の間にある有限質量を持つ光子を放射することに伴う断面積は，次のようになる．

$$\int_{\lambda_{\min}}^{\omega_0} \left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega_{\mathbf{p}'}d\omega}\right)_{\text{finite mass photon}} d\omega = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{(0)} \frac{2\alpha}{3\pi}\frac{|\mathbf{q}|^2}{m^2}\left[\log\left(\frac{2\omega_0}{\lambda_{\min}}\right) - \frac{5}{6}\right] \tag{4.471}$$

ω_0 は，ここで採用している低エネルギー近似が妥当する範囲内で選んだ光子エネルギーである[59]．ここで重要な点は，如何なるMott散乱の実験においても“検出できないほど低エネルギーの”軟光子(ソフトフォトン)が放射される確率が並存することである．現実問題として，極めてエネルギーの低い軟光子の放射を伴う特定の事象を散乱事象と見て数えるか，制動放射と見なして除外するかは，実験器具のエネルギー分解能によって決まる．エネルギー分解能が低いほど，本当は軟光子を放射している多くの制動放射が“散乱”と見なされることになる．言い換えると，現実的な実験において測定の対象となるのは，弾性散乱確率と，検出可能な最低エネルギー ΔE よりも低エネルギーの光子を放射する“少し非弾性な”散乱の確率を合わせた確率である．したがって“観測される”散乱断面積は，式(4.469)と，式(4.471)において ω_0 を ΔE と置いた量との“和”になる．この和は虚構的な光子質量 $\lambda_{\min}$ に全く依存しないので，初めに $\lambda_{\min}$ を有限と置いたとしても，ここではこれをゼロに変更して差し支えない[60]．

---

[59] $\log\lambda_{\min}$ に掛かる因子は式(4.470)から予想されることに注意してもらいたい．式(4.470)を，ω が $\omega_{\min}$ から，あるエネルギー ω_0 ($\omega_{\min}$ より大きい) まで積分するとき，$\log\omega_{\min}$ に掛かる因子と正確に同じものが得られる．式(4.471)の付加定数 $\log 2 - 5/6$ は，

a) 有限質量の光子は対数的に偏極すること (スピンは伝播方向に垂直)，および，

b) $|\mathbf{k}| = \omega$ という関係が保持されないこと，

に因っている．これらの点は技術的なものなので，詳しい議論は行わない．式(4.471)の導出方法に関心のある読者は Jauch and Rohrlich (1951), pp.336-338 を参照されたい．

[60] 光子の質量がゼロにするときに，光子のスピン状態の数が3から2へ不連続に変わることを考えると，$\lambda_{\min} \to 0$ の極限操作が成立するか疑問に思う読者もあるだろう．幸い，虚構的な有限質量の光子を含む如何なる問題においても，縦方向偏極を持つ光子が放射される確率は，横方向のそれの $\lambda_{\min}^2/(|\mathbf{k}|^2 + \lambda_{\min}^2)$ 倍であることが示される．このことは F. Coester and J. M. Jauch によって指摘された．

よって我々が“正しい”設問を行えば，いわゆる赤外の困難は困難では“ない”のである．(これに対して，我々が電子の自己エネルギーや電荷の繰り込みの計算において直面した発散は真の“困難”であって，これらの問題を本当に解決するためには，場の量子論の現在の形式に根本的な修正を加える必要があるであろう．)

我々は赤外発散が解消する例を，特定の問題，すなわち低エネルギー Mott 散乱の $(Z\alpha)^2\alpha$ の次数までだけについて示した．エネルギー分解能の高い実験では，多くの極軟光子放射を含む過程が重要となり，高次の効果を無視することができなくなる．実際 $\alpha\log(m/\lambda_{\rm min})$ が 1 に近づくと，すなわち $\lambda_{\rm min}\approx e^{-137}m\approx 10^{-60}m$ になると摂動の議論全体が破綻する．しかしながら摂動に関しては，すべての次数において赤外発散が解消されることが，1937年に F. Bloch(ブロッホ) and A. Nordsieck(ノルトジーク)によって示されている[61]．

以上をまとめると，一旦，質量と電荷に繰り込みを施せば，我々は外部Coulomb場による電子散乱への輻射補正において，如何なる種類の発散からも完全に開放される．この重要な事実は 1948年に D. Itô (伊藤大介), Z. Koba (木庭二郎) and S. Tomonaga (朝永振一郎) および J. Schwinger によって明らかにされた．

Lambシフト 輻射補正の式(4.463) の最後の応用例として，歴史的に有名な Lamb シフトに対する有限な結果を得るために，この式を用いる方法を示してみる．通例に従って，まず S 行列要素 (4.463) に対応する有効ポテンシャルを構築しておくと便利である．$\tilde{A}_\mu(q)$ はここでは Coulomb ポテンシャルの Fourier 変換とする (式(4.66) 参照)．真空偏極の議論において論じたように，式(4.463) の q^2 依存項は $\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ 型のポテンシャルを生じる．残りの異常磁気項に対応する有効ポテンシャルを見いだすために，問題3-6 (p.220) の結果を利用する．読者はこの問題において，この項の非相対論極限に相当する $(\kappa e/2m)\bar{\psi}\left(\frac{1}{2}\sigma_{k4}F_{k4}\right)\psi$ という形の相互作用について，自由粒子状態間の最低次の行列要素を求めた．そこで得た行列要素の Fourier 変換を用い，式(4.358) を利用して，異常磁気相互作用に対応する有効ポテンシャルを得る．

$$V^{(\rm anom\text{-}mom)}=\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)\left(\frac{e}{2m}\right)\left[\frac{e}{2m}\delta^{(3)}(\mathbf{x})+\frac{e}{4\pi mr^3}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{L}\right] \qquad (4.472)$$

第 1 項 (電子-中性子相互作用における Foldy 項と類似する) は s 状態だけに影響を及ぼし，第 2 項の“スピン-軌道”項は s 状態以外の状態に影響を及ぼす．まとめると，主要項 $-e^2/(4\pi r)$ を除き，式(4.463) から生じる有効ポテンシャルは次のように与えられる．

$$V^{(\rm eff)}=\frac{4\alpha^2}{3m^2}\left(\log\frac{m}{\lambda_{\rm min}}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}+\frac{3}{8}\right)\delta^{(3)}(\mathbf{x})+\frac{\alpha^2}{4\pi m^2r^3}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{L}) \qquad (4.473)$$

[61] Bloch-Nordsieck の方法については Akhiezer and Berestetskii (1965), pp.413-422 を参照．

光子質量を有限とすると，有効ポテンシャル(4.473) を利用して即座に Lamb シフトを計算できる．残念ながら上式は $\lambda_{\min} \to 0$ において発散する．この発散はもちろん，元の積分(4.446) が $|k^2|$ が小さいところで発散するという事実に因っている．この段階で，2.8節において論じた Lamb シフトの非相対論的な取扱いを思い出すことが有効である．そこでは仮想光子のエネルギーが“高い”ところでは困難があったにしても，このような低エネルギー発散の問題は生じていない．式(2.253)，式(2.255)，式(2.259) により，原子準位 A のエネルギーシフトを表す Bethe の式は，次の有効ポテンシャルに対応する．

$$V_{\text{Bethe}}^{\text{eff}} = \frac{4\alpha^2}{3m^2} \log \frac{E_\gamma^{(\max)}}{\langle E_I - E_A \rangle_{\text{av}}} \delta^{(3)}(\mathbf{x}) \tag{4.474}$$

E_I は，状態 A から電気双極子遷移によって到達することのできる原子準位である．これで Lamb シフトの有限な結果を得るための手続きが分かった．我々は Bethe の式(4.474) を仮想的な極軟光子から寄与の推定に用いる．Bethe による非相対論的な近似は，光子の波長が原子半径程度以上になれば，すなわち $E_\gamma \lesssim \alpha m$ であれば充分に精度がよいはずである．αm よりも高エネルギーの仮想光子からの寄与については，高エネルギー領域において発散のない式(4.473) を用いる．しかしながら２つの式を“統合”することは単純ではない．式(4.473) における低エネルギー切断は４通りの偏極状態を持つ共変な光子の質量として表現されている一方で，Bethe の式における切断は２通り (横波) だけの偏極状態を持つ質量のない仮想光子の最大エネルギーとして設定されている[62]．注意深い取扱いによれば (これを正確に行ったのは J. B. French である)，Feynman の $\lambda_{\min}$ と Bethe の $E_\gamma^{(\max)}$ の正しい対応関係は，次のようになる．

$$\log \lambda_{\min} \ \to \ \log 2E_\gamma^{(\max)} - \frac{5}{6} \tag{4.475}$$

この結果の導出方法は，かなり技術的なものなので，本書では説明を省く．ただ $\log \lambda_{\min}$ と $\log E_\gamma^{(\max)}$ の差が，有限質量光子の制動放射断面積 (4.471) における付加定数と正確に対応することだけを指摘しておく[63]．この結果と有効相互作用 (4.473) および (4.474) を用いると，原子準位のずれが $E_\gamma^{(\max)}$ や $\lambda_{\min}$ に全く依存しない形で与えられる．水素様原子における量子数 n，l の状態の準位ずれは，次式で表される．

---

[62] Feynman の結果と Bethe の結果を統合することは実は容易ではない．Lamb シフトの有限な結果を得るための初期の試みにおいて，この微妙な問題はかなりの混乱を (ノーベル賞級の理論物理学者たちの間にさえ) もたらしたことを述べておく．

[63] 式(4.475) の導出の詳細に関心のある読者は，Feynman (1961a), pp.152-157 ; Bjorken and Drell (1964), pp.173-176 ; Akhiezer and Berestetskii (1965), pp.423-429 などを参照されたい．

$$\Delta E_{nl} = \frac{4\alpha^2}{3m^2}\left[\log\frac{m}{2\langle E_I - E_{nl}\rangle_{\text{av}}} + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} + \frac{3}{8}\right]|\psi_{nl}(0)|^2$$
$$+\frac{\alpha^2}{4\pi m^2}\left\{\begin{matrix} l \\ (-l-1)\end{matrix}\right\}\int\frac{1}{r^3}|\psi_{nl}|^2 d^3x \quad \text{for} \left\{\begin{matrix} j = 1+\frac{1}{2} \\ j = l-\frac{1}{2}\end{matrix}\right. \tag{4.476}$$

上式では式(4.473) の $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{L}$ を固有値で置き換えた．水素原子の s 状態に関しては，式(4.476) の後ろの“スピン-軌道相互作用”がゼロとなり，次のように簡約される．

$$\Delta E_{l=0} = \frac{8\alpha^3}{3\pi}\frac{1}{n^3}Ry_\infty\left[\log\frac{m}{2\langle E_I - E_{n,l=0}\rangle_{\text{av}}} + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} + \frac{3}{8}\right] \tag{4.477}$$

水素原子の $l \neq 0$ 状態に関しては，

$$\int\frac{1}{r^3}|\psi_{nl}|^2 d^3x = \frac{1}{l(l+\frac{1}{2})(l+1)n^3a^3} \tag{4.478}$$

を用いて，次の結果を得る．

$$\Delta E_{l\neq 0} = \frac{\alpha^3}{2\pi}\frac{1}{n^3}Ry_\infty\begin{cases} \dfrac{1}{(l+\frac{1}{2})(l+1)} & \text{for} \quad j = l+\frac{1}{2} \\[2ex] -\dfrac{1}{l(l+\frac{1}{2})} & \text{for} \quad j = l-\frac{1}{2}\end{cases} \tag{4.479}$$

最後に，水素原子の $2s_{1/2}$ と $2p_{1/2}$ の準位差の式を与える．

$$E(2s_{1/2}) - E(2p_{1/2}) = \frac{\alpha^3}{3\pi}Ry_\infty\left[\log\frac{m}{2\langle E_I - E_{n=2,l=0}\rangle_{\text{av}}} + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\right] \tag{4.480}$$

このエネルギー差を周波数に換算すると 1051 MHz である．式(4.408) に対して，さらに各種の補正が考察された．たとえば Schrödinger 波動関数の Dirac 波動関数への置き換え，有限な陽子質量の導入，4 次補正 ($\alpha^4 Ry_\infty$ の項) の追加などである．その結果として“理論値”は (1057.70±0.15) MHz になり，“実験値”(1057.77±0.10) MHz に極めて近い値となった[64)]．

歴史的に，式(4.480) は 1949年に N. M. Kroll and W. E. Lamb, J. B. French and V. F. Weisskopf, H. Fukuda (福田博), Y. Miyamoto (宮本米二) and S. Tomonaga (朝永振一郎) によってそれぞれ独立に導かれたが，彼らはエネルギー差の分母に基礎を置く旧式の摂動論を用いていた．本書で紹介した方法は Feynman によるものであり，こちらの方が簡単で，計算に要する時間もかなり短い．より重要な

[64)] R. T. Robiscoe による最近の Lamb シフト測定結果は (1058.05 ± 0.10) MHz であり，この値は現在の理論予想値 (1057.50 ± 0.11) MHz とは少々異なっている．この差異を量子電磁気学の破綻と見なすべきかどうか，これを書いている時点では分かっていない．

ことは，Feynman の方法では導出の各段階において相対論的な共変性が明瞭に分かるので，形式的には無限大の (しかし直接に観測されることのない) 量を観測可能な有限量と分離する作業が，曖昧さの少ないものになるという点にある．

展望 本節において，現在の理論には発散の困難が内在するにもかかわらず，実験値と比較すべき有限な数値を，単純な高次過程の考察から引き出せることを示してきた．このような質量と電荷の繰り込み操作に立脚する手続きが量子電磁力学における他の諸過程にも適用できるのか，また α の更に高次の項を含む振幅までに適用できるのかという疑問は自然に出てくるであろう．F. J. Dyson や A. Salam(サラム)その他の人々が与えた解答は肯定的なものであった．任意の純粋に量子電磁力学的な過程に関しては，摂動論のあらゆる有限次数までに関して，質量と電荷の繰り込みだけを行えば，それ以外の発散量が現れることはない．実際，あらゆる純粋な量子電磁力学的な効果に関して，任意の精度まで，ただ２つのパラメーターすなわち電子 (あるいはミュー粒子) の観測される質量と観測される電荷を用いて求めるための曖昧さのない実用的な手続きが確立されている[65]．

他方において，理論自体に発散が内在するという事実から，現在の量子電磁力学は“短距離”において，あるいは等価的に“高エネルギー”において修正されるべきものであろうと考えられる．我々は電子の質量や電荷の有限値を得るために，切断を導入する必要があった．そのような切断の手続きが本質的に満足し得るものではないことを示しておきたい．たとえば以前，有限な電子の自己エネルギーを得るために，光子伝播関数を，

$$\frac{\delta_{\mu\nu}}{ik^2} \to \frac{\delta_{\mu\nu}}{ik^2}\left(\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2+k^2}\right) \tag{4.481}$$

のように修正する手続きを利用した．これを書き直してみる．

$$\frac{\delta_{\mu\nu}}{ik^2}\left(\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2+k^2}\right) = \frac{\delta_{\mu\nu}}{ik^2} - \frac{\delta_{\mu\nu}}{i(k^2+\Lambda^2)} \tag{4.482}$$

上式を見ると，式(4.482) の第２項は，負号を除いて質量 Λ の中性ベクトルボゾンの伝播関数と同じ形をしている．負号のために，この見かけのベクトルボゾンは $(e^2/4\pi)$ の代わりに $-(e^2/4\pi)$ という結合をする．このことは結合定数が純虚数であることを意味する．したがって式(4.482) を生じるような相互作用密度は，エルミートではない項を含まねばならない．4.2節で見たように，非エルミートの相互作用からは，非ユニタリーのS行列要素が生じる．言い換えると，式(4.482) のような修正は確率保存則を破綻させてしまうのである．

---

65) より一般的な場合において，摂動の任意の次数まで，どのように繰り込みの手続きが構築されているかという点に関心のある読者は Bjorken and Drell (1965) の第19章を参照されたい．

現在まで，多くの英雄的な試みが行われてきたにもかかわらず，理論を満足のいく形に修正することには誰も成功していない．そのような試みは，20世紀の物理学が大切にしてきた原理——Lorentz不変性，状態ベクトルの確率的な解釈，$j_\mu(x)$ と $A_\mu(x)$ の間の相互作用の局所性 (場の演算子同士は必ず同じ時空点で相互作用をするということ) など——の何れかに抵触してしまう．場の量子論における発散の困難を解決するためには，真に新しい物理原理が必要とされるように思われる．P. A. M. Dirac は現在の状況について，次のように概観している．

> 我々は，既知の量子力学の概念を理論的に展開する道のりを，すでに可能な限り進んできたように思われる．発散の困難は理論の深部に根ざした性質であり，理論の根底に劇的な変更を加えることなしに，これを除去することはおそらく不可能である．そのような理論の変更は，Bohr の軌道理論から現在の量子力学への変更にも匹敵するものになるであろう．

古典物理学が修正される際に，光の量子性や電子の波動性を示す目覚しい一連の実験事実が理論に対する刺激として作用したように，量子電磁力学に関わる将来の実験から，現在の理論を修正する方法を示唆する光明が投げかけられるという可能性はあるだろう．このことの関連で言及するなら，我々が量子電磁力学において有限の (切断に依存しない) 量を計算するときに，暗黙のうちに，切断パラメーター Λ (現象論的に量子電磁力学を修正すべき距離尺度 $1/\Lambda$ を規定する) を無限大まで高くできるものと仮定した．そうでなければ Lamb シフトや異常磁気能率などが Λ に依存することになる (p.382, 問題4-17参照)．逆に考えると，もし計算結果と異なる実験値が得られたならば，理論を修正する方法の手がかりがそこから得られるであろう．また，実験値が理論値 ($\Lambda \to \infty$ と仮定して算出される) とよく合致するのであれば，その結果は Λ として許容される値の下限，すなわち現在の量子電磁力学がどの程度の短距離尺度にまで安全に成立するかを見積もるために利用できる．たとえばミュー粒子の磁気能率における異常成分 (CERN のグループによって測定された) は 0.4％の精度で理論予想値と一致しており，そこから切断 Λ は 1 GeV 以上 ($1/\Lambda < 2 \times 10^{-14}$ cm $= 2 \times 10^{-16}$ m) と推定される (問題4-17参照)．

量子電磁力学は完成した理論体系ではない．繰り込みの定式化の成功により，量子電磁力学が「発散との平和な共存状態」(S. D. Drell の評言) に到達したことは事実である．しかし有限で完全な理論を構築できる地点からはまだ程遠い．1947-1950年の期間に遂げられた量子電磁力学の進展は，おそらく後世の科学史家からは，1930年代の初めに既にその根本的な理論的欠陥が認識されていた相対論的量子論から，物理的に精度のよい結果を引き出すことに成功を収めた最後の試みとして位置づけられるのではないかと思われる．

練習問題

4-1 (a) 式(4.38) と式(4.39) を導出せよ．“$i\epsilon$”の挿入が，次のような積分を意味のあるものにするための措置であることに注意せよ．

$$\int_{-\infty}^{t_1} dt_2 e^{i(E_n - E_i)t_2}$$

$H_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{S})}$ が時間依存因子 $e^{\pm i\omega t}$ を持つ場合に，等エネルギー遷移行列の式(4.39) はどのように修正されるか？

(b) ユニタリー性の関係式(4.54) は，状態 $|i\rangle$ の崩壊に関して，光学定理と類似の次の関係を意味することを示せ．

$$\frac{1}{\tau_i} = -2\,\mathrm{Im}T_{ii}$$

(c) 2.8節において，2次まで計算した原子準位のエネルギーずれの虚部が，式(2.237) を通じて1次の摂動論による平均寿命と関係することを示した．(b) で導いた関係式を用いて，この関係を論じよ．

4-2 Coulombポテンシャルが相対論的に (ベクトル場の第4成分ではなく) スカラー場のように変換するものと仮定してみる．電子とそのような Coulombポテンシャルとの相互作用を次のように表す．

$$\mathcal{H}_{\mathrm{int}} = e\bar{\psi}\psi\phi^{(\mathrm{e})}, \quad \phi^{(\mathrm{e})} = \frac{-Ze}{4\pi r}$$

微分断面積の形とエネルギー依存性を式(4.85) と比較すると，非相対論的領域では両者は一致するけれども，高エネルギーにおいて両者は完全に異なることを示せ．

4-3 Coulomb場による陽電子の散乱振幅を1次まで計算すると，同じ運動量-スピン状態を持つ電子が散乱される振幅と絶対値は等しく符号が反対になることは直観的に明らかである．この命題を厳密に証明せよ．電子散乱と陽電子散乱で，1次振幅と2次振幅の干渉項の符号が反対になることも示せ．(注意：実際には Z の大きい重原子の核による散乱は電子と陽電子とで顕著な違いが生じる．たとえば $Z = 80$，$\theta = 90°$，$E/m = 2$ では互いに6倍も異なる．)

4-4 (a) 陽電子-射影演算子を与える式(4.76) を証明せよ．

(b) スピン-射影演算子(4.101) は，陽電子を含む過程に対しても修正することなしに利用できることを示せ．

4-5 真空中の外部ポテンシャル(4.57) [$\mathbf{A} = (0, 0, a\cos\omega t)$，$A_4 = 0$] が単位体積・単位時間あたりに電子-陽電子対を生成する確率が，次式で与えられることを証明せよ．

$$R = \frac{2}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)\left(\frac{|a|}{2}\right)^2 \omega^2 \left(1 + \frac{2m^2}{\omega^2}\right)\sqrt{1 - \frac{4m^2}{\omega^2}}$$

電子-陽電子対の角度分布はどのようになるか？

4-6 ω 中間子 (静止エネルギー 783 MeV) は電気的に中性の $J^P = 1^-$ 粒子であり，そのほとんどが強い相互作用によって $\pi^+ + \pi^- + \pi^0$ へ崩壊する．一方，仮想的な過程，

$$\omega \to [\text{強い相互作用をする粒子対}] \to \gamma$$

も許容されるので，ω 中間子が稀に $e^+ + e^-$ に崩壊することも予想される．この崩壊相互作用を現象論的に次のように表す．

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = ig\phi_\mu \bar{\psi}\gamma_\mu \psi$$

ϕ_μ は ω 中間子に対応する中性ベクトル場である．実験によると，

$$\frac{\Gamma(\omega \to e^+ + e^-)}{\Gamma_{\text{tot}}} \approx 10^{-4}$$

であり，Γ_{tot} は約10 MeV である．$g^2/4\pi$ の値を推定せよ．最終的な結果を，

$$\frac{g^2}{4\pi} = [\text{無次元定数}] \times \left(\frac{1}{137}\right)^2$$

という形で表せ．(注意：ω 中間子が静止している座標系では，偏極ベクトルの第4成分はゼロになる．p.24, 問題1-4参照．)

4-7 次の相互作用を考慮して，再び Σ^0 ハイペロン崩壊に関する問題2-5 (p.90) を解き，結果を比較せよ．

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{\kappa e}{(m_\Lambda + m_\Sigma)}(\bar{\psi}_\Lambda \sigma_{\mu\nu}\psi_\Sigma)\left(\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\right) + \text{Hc}$$

ここでは非相対論的な近似を施してはならない．(ヒント：自乗して対角和を取る前に，できるだけ $\mathcal{M}$ 行列を簡単にせよ．)

4-8 相関を持つ2光子状態(4.214a) に対する偏光の測定を，次の2つの場合について論じよ．

(a) “両方の”観測者が円偏光の検出器を持つ場合．

(b) 観測者 A は線形偏光の検出器を，観測者 B は円偏光の検出器を持つ場合．

4-9 (a) 中間子-核子相互作用密度として式(4.377) を用いて，π^+ 中間子の非偏極陽子による散乱の微分断面積を，重心系において，ゼロ以外となる最低次まで求めよ．

(b) 核力から結合定数 G を推定すると，$G^2/4\pi \approx 14$ である．この値を用いて非常に低い運動エネルギー ($\lesssim$20 MeV) における微分断面積 $d\sigma/d\Omega$ を計算すると，次の観測結果，

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{observed}} \approx (0.1 - 0.2)\ \text{mb/sr}$$

とは著しい違う結果が与えられることを示せ．微分断面積は Coulomb 補正を施すと θ には依存しない．(注意：この不一致は，摂動論もしくは擬スカラー結合の一方もしくは両方の適用が妥当でないことを意味する．)

4-10 (a) 制動放射のS行列要素(4.240) を求めよ．さらにこの式をできる限り簡単にせよ．

(b) 非相対論的な電子が，運動量 $\mathbf{k}$，偏極ベクトル $\epsilon^{(\alpha)}$ の極軟光子を放射する制動放射の断面積は，次式で与えられることを示せ．

$$\frac{d^3\sigma}{d\Omega_{\mathbf{k}}d\Omega_{\mathbf{p}'}d\omega}=\frac{\alpha}{4\omega m^2}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}\left|\epsilon^{(\alpha)}\cdot(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\right|^2$$

$(d\sigma/d\Omega)_{\text{Mott}}$ は式(4.85) を意味する．光子の偏極に関して和を取り，光子の方向について積分を実行して次式を導け．

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega_{\mathbf{p}'}d\omega}=\frac{2\alpha}{3\pi}\frac{|\mathbf{p}'-\mathbf{p}|^2}{\omega m^2}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}$$

(ヒント：式(4.313) を利用すると偏極に関する和は容易になる．)

4-11 (a) 非相対論的な Schrödinger 理論において，

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m}\nabla^2\right)G(x,x')=i\delta^{(4)}(x-x')$$

を満たす Green 関数が，次式で与えられることを示せ．

$$\begin{aligned}G(x,x')&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\exp\left[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')-i\frac{|\mathbf{p}|^2}{2m}(t-t')\right]\\&=i\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\exp\left[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\right]\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\frac{\exp[i\omega(t-t')]}{\omega-|\mathbf{p}|^2/2m}\end{aligned}$$

$G(x,x')$ を $t'>t$ においてゼロにするためには，ω の実軸に沿った積分をどのように実行すればよいか？

(b) 上述の境界条件を満たす Green 関数を用いて，Schrödinger 粒子が時間に依存するポテンシャル，

$$\mathcal{V}(\mathbf{x},t)=V(\mathbf{x})\cos\omega t$$

によって弾性散乱される振幅を，ゼロ以外となる最低次まで求めよ．この方法で得た遷移振幅が，通常の時間に依存する2次摂動の結果と等しくなることを示せ．

4-12 (a) 3.9節では Thomson 散乱の振幅を，空孔理論と旧式の摂動論によって計算した．ここでは式(4.275) において $p=(0,im)$，$k=k'=0$ と置き，式(4.264) による $K_{\text{F}}(x,x')$ の具体的な式を用いて計算を行い，この特例において 4.5節に示した計算方法が旧式の方法と等価であることを示せ．

(b) 1929年に O. Klein と Y. Nishina が式(3.344) を導いたとき，Dirac 理論の空孔理論的な解釈はまだ確立されていなかった．したがって彼らは負エネルギー状態が完全に空いていると仮定して，正エネルギー電子が仮想的に負エネルギー状態へ遷移できるものとした．彼らは何故，正しい式を得ることができたのか？

(c) Compton 散乱を例として取り上げ，式(4.264) の下側の式の負号が Pauli の排他律に対応して現れていることを自身で納得せよ．

4-13 陽子が仮に，単なる重いミュー粒子のように振舞うものとするならば，電子-陽子散乱の $\mathcal{M}$ 行列要素は次のように与えられる．

$$\mathcal{M}_{fi} = -\frac{e^2(\bar{u}'_{\rm p}\gamma_\mu u_{\rm p})(\bar{u}'_{\rm e}\gamma_\mu u_{\rm e})}{q^2}$$

ここで $q = p^{(\rm p)\prime} - p^{(\rm p)} = p^{(\rm e)} - p^{(\rm e)\prime}$ である．実際には強粒子の性質として，陽子カレントの γ_μ 結節点 (ヴァーテックス) は修正され，$\bar{u}'_{\rm p}\gamma_\mu u_{\rm p}$ が，

$$\bar{u}'_{\rm p}\left[\gamma_\mu F_1(q^2) + \frac{\kappa}{2m_{\rm p}}\sigma_{\nu\mu}q_\nu F_2(q^2)\right]u_{\rm p}$$

に置き換わる．κ は $e/(2m_{\rm p})$ を単位とした陽子の異常磁気能率である．$F_1(q^2)$ と $F_2(q^2)$ (これらは $q^2 \geq 0$ において実数であることが示される) は Dirac形状因子と Pauli形状因子であって，$F_1(0) = F_2(0) = 1$ のように規格化されている．実験室系 (始状態で陽子が静止している) における電子-陽子散乱の断面積を表す，次の有名な Rosenbluth公式を導出せよ．

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rm Lab} = \frac{\alpha^2\cos^2(\theta/2)}{4E^2\sin^4(\theta/2)}\frac{1}{1+(2E/m_{\rm p})\sin^2(\theta/2)}$$
$$\times\left\{\left|F_1(q^2)\right|^2 + \frac{q^2}{4m_{\rm p}^2}\left[2\left|F_1(q^2)+\kappa F_2(q^2)\right|^2\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \kappa^2\left|F_2(q^2)\right|^2\right]\right\}$$

$$q^2 = \frac{4E^2\sin^2(\theta/2)}{1+(2E/m_{\rm p})\sin^2(\theta/2)}$$

実験室系における電子の入射エネルギー E は $m_{\rm e}$ よりはるかに大きいものと仮定する．(ヒント：自乗して対角和を取る前に，できるだけ $\mathcal{M}$ 行列を簡単にせよ．)

4-14 (a) 球対称ポテンシャルに関する恒等式(4.358) を証明せよ．

(b) 2電子間のスピン-軌道ポテンシャルが式(4.360) によって与えられることを示せ．

4-15 (a) 図4.21(b) (p.337) の消滅散乱ダイヤグラムは $\mathbf{p}_- = \mathbf{p}_+ = \mathbf{0}$ の $\rm e^-e^+$ 1重項に影響を及ぼさないことを示せ．まず具体的な自由粒子波動関数 (静止状態) を用いて証明を行い，次に対称性だけから論じてみよ．

(b) 図4.21(b) に対応する有効ポテンシャルを構築せよ．この“消滅散乱ポテンシャル”が ^3S 状態だけに影響を及ぼすことを示せ．

(c) $n = 1$ のポジトロニウムにおける ^3S 状態と ^1S 状態のエネルギー差 (超微細分裂) が，式(4.366) によって与えられることを示せ．

4-16 (a) 問題4-5 で扱った振動する外場の下で，始状態も終状態も真空となるS行列要素を (e の2次の過程まで) $\Pi(q^2)$ を用いて表せ．この結果と問題4-5 から，ユニタリー性の関係式(4.433) が実際に(4.432) を与えることを示せ．

(b) $\Pi(q^2)/\omega$ に対して $q^2 = -\omega^2$ において通常の解析的な議論を適用し，$\Pi(q^2)$ の“1回減却 (once-subtracted) 分散関係”を書け．その積分を評価して，$\Pi^f(q^2)$ の $q^2 \approx 0$ における近似式と (式(4.424)参照)，$q^2 \gg m^2$ における近似式を求めよ．

4-17 付録E の技法を応用して，“有限の Λ”の下でミュー粒子の異常磁気能率を求めよ．Λ が 500 MeV，1 GeV，10 GeV と置いてみて，Schwinger の予言値がどのように変更されるかを論じてみよ．

付録 A　輻射ゲージ (Coulombゲージ) の電磁力学

この付録の目的は，３次元ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ が横波の条件を満たすような電磁力学系の基本的ハミルトニアンの導出である．まず，式(1.82) の形のゲージ変換によって，次の横波条件を満たすような新たなゲージへの変換が必ず可能であることを示す．

$$\nabla\cdot\mathbf{A}(\mathbf{x},t)=0 \tag{A.1}$$

これを具体的に確認するために，変換式，

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{(\text{new})}(\mathbf{x},t)&=\mathbf{A}^{(\text{old})}(\mathbf{x},t)+\nabla\chi(\mathbf{x},t)\\ A_0^{(\text{new})}(\mathbf{x},t)&=A_0^{(\text{old})}(\mathbf{x},t)-\frac{1}{c}\frac{\partial\chi(\mathbf{x},t)}{\partial t}\end{aligned} \tag{A.2}$$

において，変換関数 χ を次のように置いてみる．

$$\chi(\mathbf{x},t)=\frac{1}{4\pi}\int\frac{d^3x'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\nabla'\cdot\mathbf{A}^{(\text{old})}(\mathbf{x}',t) \tag{A.3}$$

そうすると，新たなベクトルポテンシャルの３次元発散は，

$$\nabla\cdot\mathbf{A}^{(\text{new})}=\nabla\cdot\left(\mathbf{A}^{(\text{old})}+\nabla\chi\right)=0 \tag{A.4}$$

となり，変換後のゲージではベクトルポテンシャルが横波条件を満足する輻射場を表すことが分かる．一方，式(1.75) は A_μ に関して一般的に成立する式であるが，これによれば第ゼロ成分は常に次式を満たす．

$$\nabla^2A_0-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2A_0}{\partial t^2}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial A_0}{\partial t}\right)=-\rho \tag{A.5}$$

３次元ベクトルポテンシャルが横波条件を満たすならば，A_0 はPoisson（ポワソン）方程式によって決定される．

$$\nabla^2A_0(\mathbf{x},t)=-\rho(\mathbf{x},t) \tag{A.6}$$

この方程式は時間微分を含んでいない．境界条件を無限遠において $A_0\to 0$ と置いた場合の解は，次のように表される．

$$A_0(\mathbf{x},t)=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho(\mathbf{x}',t)\,d^3x'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{A.7}$$

時刻 t における A_0 の値が“同じ”時刻の電荷分布だけによって決まるという意味において，式(A.7) における A_0 は“瞬時に到達する (instantaneous) Coulombポテンシャル”であることを強調しておく．これは A_0 に関する D'Alembertian方程式の解として得られる，次のような“遅延 (retarded) Coulombポテンシャル”とは全く異なるものとして区別されなければならない[1]．

$$A_0(\mathbf{x},t)=\frac{1}{4\pi}\int d^3x'\,\frac{\rho(\mathbf{x}',t')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\bigg|_{t'=t-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}} \tag{A.8}$$

ここまでの結果をまとめてみよう．

a) ベクトルポテンシャルが横波条件(A.1) を満たすようなゲージを選ぶことは常に可能である．

b) $\mathbf{A}$ が横波条件を満たす場合には，A_0 は式(A.7) によって与えられる．

$\mathbf{A}$ が式(A.1) を満たし，A_0 が式(A.7) によって与えられるようなゲージは，輻射ゲージ(もしくは Coulombゲージ) と呼ばれる．荷電粒子と電磁場を含む系の全ハミルトニアンの密度は，

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}_{\mathrm{em}}+\mathcal{H}_{\mathrm{matter}}+\mathcal{H}_{\mathrm{int}} \tag{A.9}$$

という形で与えられ，これを空間積分したものが全ハミルトニアンになる．電磁場のハミルトニアン密度は，式(1.73) により，次のように与えられる．

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathrm{em}}&=\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{em}}}{\partial(\partial A_\mu/\partial x_4)}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_4}-\mathcal{L}_{\mathrm{em}}\\&=\frac{1}{2}\left(|\mathbf{B}|^2+|\mathbf{E}|^2\right)-i\mathbf{E}\cdot\nabla A_4\\&=\frac{1}{2}\left(|\mathbf{B}|^2+|\mathbf{E}|^2\right)-\rho A_0+\nabla\cdot(A_0\mathbf{E})\end{aligned} \tag{A.10}$$

最終行の最後の項は $\int\mathcal{H}_{\mathrm{em}}d^3x$ には寄与を持たないので無視してよい．ハミルトニアン密度の相互作用を表す部分を，次のように書く．

$$\mathcal{H}_{\mathrm{int}}=-\frac{j_\mu A_\mu}{c} \tag{A.11}$$

[1] 式(A.5) において，ベクトルポテンシャルに対して横波条件の代わりに Lorentz条件を課した場合に A_0 に関する D'Alembertian方程式が与えられる．式(A.8) の導出については，たとえば Panofsky and Philips (1958), pp.212-214 を参照．

j_μ は電荷電流密度 (4 元電流密度) である．式(A.10) と式(A.11) を組み合わせると，次式が得られる．

$$
\begin{aligned}
H_{\rm em} + H_{\rm int} &= \int (\mathcal{H}_{\rm em} + \mathcal{H}_{\rm int}) d^3x \\
&= \frac{1}{2}\int \left(|\mathbf{B}|^2 + |\mathbf{E}|^2\right) d^3x - \int \frac{\mathbf{j}\cdot\mathbf{A}}{c} d^3x
\end{aligned}
\tag{A.12}
$$

上式では ρA_0 の項が完全に無くなっており，一見して奇妙に思われる．この“謎”については，後で考察することにしよう．

次に為すべき作業は，輻射ゲージを採用して，ハミルトニアン(A.12) を少々異なる形に書き直すことである．まず，電場が一般的に次のように表されることを確認しておく．

$$
\mathbf{E} = -\nabla A_0 - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}
\tag{A.13}
$$

$\mathbf{E}$ を，次のように非回転成分 (縦波成分) $\mathbf{E}_{\|}$ と回転成分 (横波成分) $\mathbf{E}_{\perp}$ に分けることは常に可能である．

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\|} + \mathbf{E}_{\perp} \\
&\qquad \nabla \times \mathbf{E}_{\|} = \mathbf{0} \\
&\qquad \nabla \cdot \mathbf{E}_{\perp} = 0
\end{aligned}
\tag{A.14}
$$

輻射ゲージを採用すると，これらが一意的に，次のように与えられる．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\|} &= -\nabla A_0 \\
\mathbf{E}_{\perp} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}^{(\perp)}}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{A.15}
$$

上付きの $(\perp)$ は，ベクトルポテンシャルに横波条件(A.1) が課されていることを忘れないように付けておいた．式(A.15) は以下のことから証明される．(a) $\nabla \times (\nabla A_0)$ はゼロになる．(b) $\partial \mathbf{A}^{(\perp)}/\partial t$ の発散は，横波条件(A.1) によってゼロになる．(c) $\mathbf{E}$ を $\mathbf{E}_{\|}$ と $\mathbf{E}_{\perp}$ に分解する方法は一意的である．

一方，輻射ゲージにおいて，$|\mathbf{E}|^2$ の空間積分は次のように表される．

$$
\int |\mathbf{E}|^2 d^3x = \int |\mathbf{E}_{\perp}|^2 d^3x + \int \rho A_0 \, d^3x
\tag{A.16}
$$

上式を証明するために，まず次の関係に注意する．

$$\begin{aligned}\int |\mathbf{E}|^2 d^3x &= \int \left[|\mathbf{E}_\perp|^2 - 2(\nabla A_0)\cdot\mathbf{E}_\perp + |\mathbf{E}_\parallel|^2 \right] d^3x \\ &= \int |\mathbf{E}_\perp|^2 d^3x + 2\int A_0(\nabla\cdot\mathbf{E}_\perp) d^3x + \int |\mathbf{E}_\parallel|^2 d^3x \\ &= \int \left(|\mathbf{E}_\perp|^2 + |\mathbf{E}_\parallel|^2 \right) d^3x \end{aligned} \tag{A.17}$$

更に，

$$\begin{aligned}\int |\mathbf{E}_\parallel|^2 d^3x &= \int (\nabla A_0)\cdot(\nabla A_0) d^3x \\ &= \int \nabla\cdot(A_0 \nabla A_0) d^3x - \int A_0 \nabla^2 A_0 d^3x \\ &= \int \rho A_0 d^3x \end{aligned} \tag{A.18}$$

であり，式(A.17) と式(A.18) を組み合わせれば，$|\mathbf{E}|^2$ の空間積分が式(A.16) によって与えられることが分かる．ハミルトニアンの式(A.12) に戻ってみると，ρA_0 項が消失したように見えたのは，実は $|\mathbf{E}|^2$ の空間積分に埋め込まれていたという事情が分かった．

$$H_{\mathrm{em}} + H_{\mathrm{int}} = \frac{1}{2}\int \left(|\mathbf{B}|^2 + |\mathbf{E}_\perp|^2 \right) d^3x + \int \left(\frac{1}{2}\rho A_0 - \frac{1}{c}\mathbf{j}\cdot\mathbf{A}^{(\perp)} \right) d^3x \tag{A.19}$$

しかしながら，ここでは ρA_0 項が因子 $\frac{1}{2}$ を伴っていることに注意してもらいたい．

最後に，ハミルトニアンから A_0 を (等価的に $\mathbf{E}_\parallel$ を) 消す作業に取りかかる．式(A.7) を用いて，式(A.19) の ρA_0 の項を次のように書く．

$$\frac{1}{2}\int \rho A_0 d^3x = \frac{1}{2}\int d^3x \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x},t)\rho(\mathbf{x}',t)}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{A.20}$$

したがって，ハミルトニアンは，

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{em}} + H_{\mathrm{int}} &= \frac{1}{2}\int \left(|\mathbf{B}|^2 + |\mathbf{E}_\perp|^2 \right) d^3x \\ &\quad + \frac{1}{2}\int d^3x \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x},t)\rho(\mathbf{x}',t)}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - \frac{1}{c}\int \mathbf{j}\cdot\mathbf{A}^{(\perp)} d^3x \end{aligned} \tag{A.21}$$

となる．これを $\mathbf{A}^{(\perp)}$ と $\mathbf{j}$ と ρ だけによって書き直すと，次のようになる．

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{em}} + H_{\mathrm{int}} &= \frac{1}{2}\int \left(\left| \nabla \times \mathbf{A}^{(\perp)} \right|^2 + \left| \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}^{(\perp)}}{\partial t} \right|^2 \right) d^3x \\ &\quad - \frac{1}{c}\int \mathbf{j}\cdot\mathbf{A}^{(\perp)} d^3x + \frac{1}{2}\int d^3x \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x},t)\rho(\mathbf{x}',t)}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \end{aligned} \tag{A.22}$$

上式では静電ポテンシャル A_0 が (すなわち $\mathbf{E}$ の非回転部分が) 完全に消えて，その役割は瞬時のCoulomb相互作用へと代替されている．このことは，このゲージにおいて A_0 もしくは $\mathbf{E}_\perp$ に関わる力学的な自由度を忘れてしまってよいことを意味する．輻射ゲージの Maxwell場を量子化する際には，３次元ベクトルポテンシャルの横波成分 $\mathbf{A}^{(\perp)}$ だけを量子化すれば充分である．この手続きは1932年に E. Fermi によって考え出された．

式(A.21) と式(A.22) を見ると，相互作用ハミルトニアンの部分において電磁ポテンシャルが顕わに含まれるのは，$-(1/c)\mathbf{j}\cdot\mathbf{A}^{(\perp)}$ の空間積分項だけである．非相対論的な量子力学では，これは単に次の差によって与えられる．

$$\sum_i \frac{1}{2m_i}\left(\mathbf{p}^{(i)} - \frac{e_i\mathbf{A}^{(\perp)}}{c}\right)^2 - \sum_i \frac{(\mathbf{p}^{(i)})^2}{2m_i} \tag{A.23}$$

Coulomb項の電荷密度に関しては，常套的な次の形を用いればよい．

$$\rho = \sum_i e_i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(i)}) \tag{A.24}$$

そうすると，Coulomb項は次のように表される．

$$\frac{1}{2}\int d^3x \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x},t)\rho(\mathbf{x}',t)}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \sum_{i>j} \frac{e_i e_j}{4\pi|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}|} + \frac{1}{2}\sum_i \frac{e_i^2}{4\pi|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(i)}|} \tag{A.25}$$

最後の項は荷電粒子と，その荷電粒子自体が生成している Coulomb場との相互作用を表しており，これは無限大となる．したがって通常はこの項を省く．しかし Dirac 電子の自己エネルギーを論じる際には，4.7節に示したように，この項に相当するような相対論的な項を含める必要がある．

付録 B　ガンマ行列

B.I 本書の表示 (計量テンソルを併用しないDirac-Pauli標準表示)

(Pauli, Källén, Rose, Akhiezer, Berestetskii などもこの表示を採用.)

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$$
$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu$$
$$\gamma_\mu^2 = 1$$

$$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \frac{1}{4!}\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma$$
$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0 \quad (\mu = 1, 2, 3, 4)$$
$$\gamma_5^\dagger = \gamma_5$$
$$\gamma_5^2 = 1$$

$$a_\mu = (\mathbf{a}, a_4) = (\mathbf{a}, ia_0)$$
$$a{\cdot}b = \mathbf{a}{\cdot}\mathbf{b} + a_4b_4 = \mathbf{a}{\cdot}\mathbf{b} - a_0b_0$$

$$\gamma_k = i\beta\alpha_k \overset{\text{DP}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_k \\ i\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, 3)$$
$$\gamma_4 = \beta \overset{\text{DP}}{=} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$
$$\gamma_5 \overset{\text{DP}}{=} -\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

(訳註) 標準的な Pauli 行列 σ_k の表示と I の定義は次の通り.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = -i\gamma_\mu\gamma_\nu \quad (\mu \neq \nu)$$

$$\sigma_{ij} = -i\gamma_i\gamma_j = -\gamma_5\alpha_k = \Sigma_k \overset{\text{DP}}{=} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \quad (ijk \text{ cyclic})$$

$$\sigma_{k4} = -\sigma_{4k} = -\gamma_5\sigma_{ij} = i\gamma_4\gamma_k = \alpha_k \overset{\text{DP}}{=} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (ijk \text{ cyclic})$$

$$i\gamma_5\gamma_k \overset{\text{DP}}{=} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & -\sigma_k \end{pmatrix}$$

$$i\gamma_5\gamma_4 \overset{\text{DP}}{=} i\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

自由粒子の Dirac 方程式

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0, \quad (i\gamma\cdot p + mc)u^{(s)}(\mathbf{p}) = 0$$

標準的な Pauli 行列を採用して γ_μ, γ_5 および α_k, β を示しておく (訳者補遺).

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} & & & -i \\ & & -i & \\ & +i & & \\ +i & & & \end{pmatrix}, \ \gamma_2 = \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & +1 & \\ & +1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}, \ \gamma_3 = \begin{pmatrix} & & -i & \\ & & & +i \\ +i & & & \\ & -i & & \end{pmatrix}$$

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & +1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \ \gamma_5 = \begin{pmatrix} & & -1 & \\ & & & -1 \\ -1 & & & \\ & -1 & & \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} & & & +1 \\ & & +1 & \\ & +1 & & \\ +1 & & & \end{pmatrix}, \ \alpha_2 = \begin{pmatrix} & & & -i \\ & & +i & \\ & -i & & \\ +i & & & \end{pmatrix}, \ \alpha_3 = \begin{pmatrix} & & +1 & \\ & & & -1 \\ +1 & & & \\ & -1 & & \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & +1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

B.II 計量テンソルを併用する場合のDirac-Pauli標準表示

(Messiah, Bjorken and Drell, Schweberなどが採用している表示.)

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$$

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \text{ [計量テンソル]}$$

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \qquad g_{\mu\nu} = 0 \text{ if } \mu \neq \nu$$

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{k\dagger} = -\gamma^k, \qquad \gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu$$

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

$$a^\mu = (a_0, \mathbf{a}) \text{ [反変ベクトル]}$$

$$a_\mu = g_{\mu\nu}a^\nu = (a_0, -\mathbf{a}) \text{ [共変ベクトル]}$$

$$a{\cdot}b = a^\mu b_\mu = a_0 b_0 - \mathbf{a}{\cdot}\mathbf{b}$$

$$\gamma^0 = \beta \overset{\text{DP}}{=} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \beta\alpha_k \overset{\text{DP}}{=} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

自由粒子の Dirac方程式

$$\left(-i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0, \quad (\gamma{\cdot}p - mc)u^{(s)}(\mathbf{p}) = 0$$

標準的な Pauli行列を採用して γ^μ を示しておく(訳者補遺).

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & +1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} & & & +1 \\ & & +1 & \\ & -1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} & & & -i \\ & & +i & \\ & +i & & \\ -i & & & \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} & & +1 & \\ & & & -1 \\ -1 & & & \\ & +1 & & \end{pmatrix}$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} & & +1 & \\ & & & +1 \\ +1 & & & \\ & +1 & & \end{pmatrix}$$

(訳註) 標準表示 (Dirac-Pauli表示) 以外の Weyl表示 (カイラル表示) や Majorana表示については, 例えば Itzykson and Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, 1980, Appendix A-2 などを参照するとよい.

B.III ガンマ行列の有用な公式 (本書の表示のみ)

$$(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot b) = 2a\cdot b - (\gamma\cdot b)(\gamma\cdot a)$$

$$(\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{a})(\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{b}) = (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{a})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + i\boldsymbol{\Sigma}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

$$\gamma_4\left[(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot b)\cdots(\gamma\cdot l)\right]^\dagger\gamma_4 = (-\gamma\cdot l)\cdots(-\gamma\cdot b)(-\gamma\cdot a)$$

4元ベクトル $a = (\mathbf{a}, ia_0)$ において a_k と a_0 が実数，b および c も同様とすると，

$$\left.\begin{aligned}
&\gamma_\mu\gamma_\mu = 4\\
&\gamma_\mu(\gamma\cdot a)\gamma_\mu = -2\gamma\cdot a\\
&\gamma_\mu(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot b)\gamma_\mu = 2(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot b) + 2(\gamma\cdot b)(\gamma\cdot a) = 4a\cdot b\\
&\gamma_\mu(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot b)(\gamma\cdot c)\gamma_\mu = -2(\gamma\cdot c)(\gamma\cdot b)(\gamma\cdot a)
\end{aligned}\right\}\ \mu\text{について和をとる.}$$

$$\mathrm{Tr}(\underbrace{\gamma_\mu\gamma_\nu\cdots\gamma_\sigma\gamma_\rho}_{\text{odd number}}) = 0$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma_5\underbrace{\gamma_\mu\gamma_\nu\cdots}) = 0$$

less than 4γ $(\mu,\nu,\ldots\neq 5)$, for 4γ nonvanishing only if all four are different.

恒等行列を除く15個の独立な Γ_A すべてに関して，

$$\mathrm{Tr}(\Gamma_A) = 0 \qquad (\Gamma_A = \gamma_\mu,\ \sigma_{\mu\nu\,(\mu<\nu)},\ i\gamma_5\gamma_\mu,\ \gamma_5)$$

$$\mathrm{Tr}\left[(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot b)\right] = 4a\cdot b$$

$$\mathrm{Tr}\left[(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot b)(\gamma\cdot c)(\gamma\cdot d)\right] = 4\left[(a\cdot b)(c\cdot d) - (a\cdot c)(b\cdot d) + (a\cdot d)(b\cdot c)\right]$$

B.IV Dirac-Pauli標準表示における自由粒子の波動関数

a) $E=\sqrt{c^2|\mathbf{p}|^2+m^2c^4}>0$

$$\psi^{(1,2)}=\sqrt{\frac{mc^2}{EV}}\,u^{(1,2)}(\mathbf{p})\exp\left[i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{\hbar}-i\frac{Et}{\hbar}\right]$$

$$u^{(1)}(\mathbf{p})=\sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}}\begin{pmatrix}1\\0\\\dfrac{cp_3}{E+mc^2}\\\dfrac{c(p_1+ip_2)}{E+mc^2}\end{pmatrix}$$

$$u^{(2)}(\mathbf{p})=\sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}}\begin{pmatrix}0\\1\\\dfrac{c(p_1-ip_2)}{E+mc^2}\\-\dfrac{cp_3}{E+mc^2}\end{pmatrix}$$

b) $E=-\sqrt{c^2|\mathbf{p}|^2+m^2c^4}<0$

$$\psi^{(3,4)}=\sqrt{\frac{mc^2}{|E|V}}\,u^{(3,4)}(\mathbf{p})\exp\left[i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{\hbar}+i\frac{|E|t}{\hbar}\right]$$

$$u^{(3)}(\mathbf{p})=\sqrt{\frac{|E|+mc^2}{2mc^2}}\begin{pmatrix}-\dfrac{cp_3}{|E|+mc^2}\\-\dfrac{c(p_1+ip_2)}{|E|+mc^2}\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$u^{(4)}(\mathbf{p})=\sqrt{\frac{|E|+mc^2}{2mc^2}}\begin{pmatrix}-\dfrac{c(p_1-ip_2)}{|E|+mc^2}\\\dfrac{cp_3}{|E|+mc^2}\\0\\1\end{pmatrix}$$

c) “陽電子スピノル”

$$v^{(1)}(\mathbf{p})=-u^{(4)}(-\mathbf{p})$$
$$v^{(2)}(\mathbf{p})=u^{(3)}(-\mathbf{p})$$

付録 C　Pauliの基本定理

ガンマ行列を用いた式の形が，ガンマ行列の表示に依存しないことを保証するPauliの基本定理を証明する前に，本文において示したガンマ行列の性質をまとめておく．3.5節において，16個の独立な 4×4 行列 Γ_A $(A = 1, \ldots, 16)$ を与えた．

$$\Gamma_A = 1,\ \gamma_\mu,\ \sigma_{\mu\nu}\,(\mu < \nu),\ i\gamma_5\gamma_\mu,\ \gamma_5 \tag{C.1}$$

これらは各々が，

$$\Gamma_A^2 = 1 \tag{C.2}$$

を満たす．γ_μ と γ_ν の反交換関係だけを用いて (すなわち特定の表示には頼らずに)，直接的な洞察から以下の性質を示すことができる．

a) 次のように η_{AB} を定義する．

$$\Gamma_A\Gamma_B = \eta_{AB}\Gamma_C \tag{C.3}$$

そうすると，η_{AB} の値は，

$$\eta_{AB} = +1,\ -1,\ +i,\ -i \tag{C.4}$$

の何れかである．

b) 行列 Γ_A と行列 Γ_B は必ず交換もしくは反交換する (すなわち $\Gamma_A\Gamma_B = \pm\Gamma_B\Gamma_A$)．その上，すべての Γ_A $(\neq 1)$ それぞれに対して，次式を満たすような Γ_B が少なくともひとつは存在する．

$$\Gamma_B\Gamma_A\Gamma_B = -\Gamma_A \tag{C.5}$$

性質 (b) の例として，$\Gamma_A = i\gamma_5\gamma_3$，もしくは $\Gamma_A = \sigma_{12}$ の場合は次のようになる．

$$\gamma_5(i\gamma_5\gamma_3)\gamma_5 = -i\gamma_5\gamma_3, \quad \gamma_2\sigma_{12}\gamma_2 = -\sigma_{12} \tag{C.6}$$

本文で既に指摘したように (p.133脚註参照)，性質 (b) を利用して，直ちに次の性質 (c) を証明することができる．

c) 任意の 4×4 行列 X を，一意的に次の線形結合の形に展開できる．

$$X = \sum_{A=1}^{16} x_A \Gamma_A \tag{C.7}$$

Pauliの基本定理を証明するために，以下に示すようなSchur(シューア)の補助定理 (Schur's lemma) を利用する必要がある．

『次の性質を持つ 4×4 行列を考える．

$$[X, \gamma_\mu] = 0 \quad \text{for every } \gamma_\mu \ (\mu = 1, 2, 3, 4) \tag{C.8}$$

このとき X は恒等行列の定数倍でなければならない．』

この補助定理の証明は，次のように為される．性質 (c) を用いて X を展開する．

$$X = x_A \Gamma_A + \sum_{C \neq A} x_C \Gamma_C \tag{C.9}$$

上式の Γ_A $(\neq 1)$ は，恒等行列以外の 15個の Γ_A 行列の中から選んだ任意のひとつである．X がすべての γ_μ と交換するならば，必然的に Γ_B $(B = 1, \ldots, 16)$ とも交換する．

$$\Gamma_B X = X \Gamma_B, \quad \Gamma_B X \Gamma_B = X \tag{C.10}$$

性質 (b) により，式(C.9) に用いた特定の Γ_A に対し，式(C.5) を満たすような Γ_B が (少なくともひとつは) 見いだされる．その Γ_B を用いて，X を次のように書き直す．

$$\begin{aligned} X &= \Gamma_B X \Gamma_B \\ &= x_A \Gamma_B \Gamma_A \Gamma_B + \sum_{C \neq A} x_C \Gamma_B \Gamma_C \Gamma_B \\ &= -x_A \Gamma_A + \sum_{C \neq A} (\pm 1) x_C \Gamma_C \end{aligned} \tag{C.11}$$

上式には式(C.9)，式(C.10) および性質 (b)，(c) を用いた．式(C.11) と式(C.9) を比較し，性質 (c) を考え合わせると，

$$x_A = -x_A = 0 \tag{C.12}$$

が結論される．Γ_A として恒等行列以外のものを任意に選んでよいので，式(C.12) は，X を式(C.7) のように展開する際に，恒等行列以外の係数はすべてゼロでなければ

ならないことを意味する．したがって X は必ず恒等行列の定数倍である．(もちろん X はゼロであってもよい．)

これで Pauli の基本定理を証明する準備は整った．これは次のような定理である．

『4×4 行列の組 $\{\gamma_\mu\}$ $(\mu=1,2,3,4)$ と，もうひとつの組 $\{\gamma'_\mu\}$ $(\mu=1,2,3,4)$ があり，それぞれが，

$$\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\}=2\delta_{\mu\nu} \tag{C.13}$$

$$\{\gamma'_\mu,\gamma'_\nu\}=2\delta_{\mu\nu} \tag{C.14}$$

を満たすならば，次のような正則な 4×4 行列 S が存在する．

$$\gamma'_\mu=S\gamma_\mu S^{-1} \tag{C.15}$$

S は定係数の不定性を除き，一意的に決まる．』

この定理を証明するために，まず Γ_A と同様の定義の方法で，16個の Γ'_A を定義しておく．たとえば $\Gamma_A=i\gamma_5\gamma_4=i\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ に対して，$\Gamma'_A=i\gamma'_5\gamma'_4=i\gamma'_1\gamma'_2\gamma'_3$ とする．式(C.3) と同じ η_{AB} を用いて，

$$\Gamma'_A\Gamma'_B=\eta_{AB}\Gamma'_C \tag{C.16}$$

となることは明らかである．S として次の形を考える．

$$S=\sum_A\Gamma'_A F\Gamma_A \tag{C.17}$$

F はある (任意の) 4×4 行列である．式(C.17) の両辺に左から Γ'_B を，右から Γ_B を掛けると，次式を得る．

$$\Gamma'_B S\Gamma_B=\sum_A\Gamma'_B\Gamma'_A F\Gamma_A\Gamma_B \tag{C.18}$$

式(C.2) はプライム付きのガンマ Γ' においても成立するので，

$$\Gamma'_B\Gamma'_A=\Gamma'^{-1}_B\Gamma'^{-1}_A=(\Gamma'_A\Gamma'_B)^{-1}=\eta^{-1}_{AB}\Gamma'^{-1}_C=\eta^{-1}_{AB}\Gamma'_C \tag{C.19}$$

である．したがって式(C.18) は次のように書き直される．

$$\Gamma'_B S\Gamma_B=\sum_A\eta^{-1}_{AB}\Gamma'_C F\eta_{AB}\Gamma_C=\sum_C\Gamma'_C F\Gamma_C \tag{C.20}$$

上式の右辺は，式(C.17) と一致しているので，

$$\Gamma'_B S\Gamma_B=S \tag{C.21}$$

が得られる．これは任意の Γ_B について成立することに注意してもらいたい．

ここで，式(C.17) において，必ず $S \neq 0$ となるように F を選ぶことが可能である．これを証明するために，背理として，あらゆる F に対して S がゼロになると仮定してみよう．F を次の形で表されるように選んでみる．

$$F_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'} \tag{C.22}$$

たとえば $\alpha' = 1$，$\beta' = 2$ であれば，

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{C.23}$$

となる．$S = 0$ という仮定と式(C.22) を組み合わせると，式(C.17) を，S の δ 行 ϵ 列の行列要素を表す式として，次のように書き直すことができる．

$$\sum_A (\Gamma'_A)_{\delta\alpha'}(\Gamma_A)_{\beta'\epsilon} = 0 \tag{C.24}$$

当面の仮定により S はあらゆる F に対して恒等的にゼロなので，式(C.24) はすべての β' と ϵ に関して成立しなければならず，ここから行列に関する式，

$$\sum_A (\Gamma'_A)_{\delta\alpha'}\Gamma_A = 0 \tag{C.25}$$

が導かれる．これは明らかに各 Γ 行列相互の線形独立性の前提に抵触する．したがって，この矛盾を回避するためには，$S \neq 0$ となるような F が存在しなければならない．

次に為すべき作業は，S が正則であることの証明である．S' を，

$$S' = \sum_C \Gamma_C F' \Gamma'_C \tag{C.26}$$

のように構築する．F' は何らかの 4×4 行列である．式(C.18) から式(C.21) までの手順を繰り返すと，

$$\Gamma_B S' \Gamma'_B = S' \tag{C.27}$$

を得る．そして S' がゼロにならないように F' を選ぶことができる．次式を考える．

$$S'S = \Gamma_B S' \Gamma'_B \Gamma'_B S \Gamma_B = \Gamma_B S' S \Gamma_B \tag{C.28}$$

これはすべての Γ_B について成立する．したがって，

$$[S'S, \gamma_\mu] = 0 \tag{C.29}$$

となる．Schurの補助定理により，$S'S$ は恒等行列の定数倍でなければならない．

$$S'S = c \tag{C.30}$$

c は定数である．よって，

$$S^{-1} = S'/c \tag{C.31}$$

となる．S' はゼロではないので，これで S^{-1} が存在しなければならないことが判った．式(C.21) に戻って，両辺に右から S^{-1} を掛けると，

$$\Gamma'_B S \Gamma_B S^{-1} = 1 \tag{C.32}$$

すなわち，

$$S\Gamma_B S^{-1} = \Gamma'_B \tag{C.33}$$

が得られるが，これは式(C.15) と同じ形である．したがって式(C.15) の性質を持つ S の存在が証明されたことになる．

S の一意性を証明するために，S_1 と S_2 が両方とも式(C.33) を満たすものと仮定してみよう．そうすると，

$$S_1\gamma_\mu S_1^{-1} = S_2\gamma_\mu S_2^{-1} \tag{C.34}$$

すなわち，

$$S_2^{-1}S_1\gamma_\mu = \gamma_\mu S_2^{-1}S_1 \tag{C.35}$$

が得られる．Schurの補助定理によって，$S_2^{-1}S_1$ は恒等行列の定数倍と見なされる．よって，

$$S_1 = aS_2 \tag{C.36}$$

となる．a は定係数であり，S_1 と S_2 は定係数の違いを除き互いに等しい．これでPauliの基本定理の証明は完了した．

付録 D　共変な摂動論における公式と規則

D.I $\mathcal{M}$ 行列の定義

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(P_f^{(\mathrm{tot})} - P_i^{(\mathrm{tot})}\right) \sqrt{\prod_{\mathrm{ext}} \left(\frac{n_j}{V}\right)} \mathcal{M}_{fi}$$

$$n_j = \begin{cases} \dfrac{m_j}{E_j} & (\text{フェルミオン}) \\[2ex] \dfrac{1}{2E_j} & (\text{ボゾン}) \end{cases}$$

D.II $\mathcal{M}_{fi}$ と遷移頻度の関係 ('共変な'黄金律) および断面積

a) 崩壊 $1 \to 2 + 3 + \cdots + n$. 微分崩壊頻度 dw :

$$dw = \frac{1}{2E_1} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \prod_{\substack{\text{external}\\\text{fermions}}} (2m_{\mathrm{fermi}}) \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \cdots \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 2E_n} (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_1 - \sum_{j=2}^{n} p_j\right)$$

$\delta^{(4)}$ 関数を消すために，まず終状態に含まれる粒子のひとつについて 3 次元運動量の積分を行い，それから次の関係を用いる．

$$d^3 p_k \delta\left(E_1 - \sum_{j=2}^{n} E_j\right) = \frac{|\mathbf{p}_k|^2 d\Omega_k}{\left(\dfrac{\partial\left(\sum_{j=2}^{n} E_j\right)}{\partial |\mathbf{p}_k|}\right)_{\theta_k, \phi_k}} = \frac{|\mathbf{p}_k|^2 d|\mathbf{p}_k| d\phi_k}{\left(\dfrac{\partial\left(\sum_{j=2}^{n} E_j\right)}{\partial (\cos\theta_k)}\right)_{|\mathbf{p}_k|, \phi_k}}$$

2 粒子生成型崩壊 $1 \to 2 + 3$ の，粒子 1 の静止系における崩壊頻度は，

$$\Gamma(1 \to 2 + 3) = \frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{|\mathbf{p}_{\mathrm{fin}}|}{m_1^2} \int d\Omega \sum_{\substack{\text{final}\\\text{spin}}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \prod_{\substack{\text{external}\\\text{fermions}}} (2m_{\mathrm{fermion}})$$

と与えられる．ここでは $|\mathbf{p}_{\mathrm{fin}}| = |\mathbf{p}_2| = |\mathbf{p}_3|$ である．

b) 粒子１と粒子２が，同一直線上の反対向きの運動量を持って衝突し，$1+2\to 3+4+\cdots+n$ のように反応した際の微分断面積 $d\sigma$：

$$d\sigma=\frac{1}{v_{\rm rel}}\frac{1}{2E_1}\frac{1}{2E_2}|\mathcal{M}_{fi}|^2\prod_{\substack{\text{external}\\ \text{fermions}}}(2m_{\rm fermi})\frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2}\cdots\frac{d^3p_n}{(2\pi)^3 2E_n}$$
$$\times(2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(p_1+p_2-\sum_{j=3}^{n}p_j\Big)$$

$$v_{\rm rel}E_1E_2=\begin{cases}E_{\rm tot}|\mathbf{p}_{\rm in}| & \text{重心系}\ (|\mathbf{p}_{\rm in}|=|\mathbf{p}_1|=|\mathbf{p}_2|)\\ m_2|\mathbf{p}_1| & \text{粒子2の静止系 (実験室系)}\\ \sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-(m_1m_2)^2} & \text{任意の座標系}\end{cases}$$

２粒子生成型散乱 $1+2\to 3+4$ の場合，重心系における微分断面積は，

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rm CM}=\frac{1}{4}\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{E_{\rm tot}^2}\frac{|\mathbf{p}_{\rm fin}|}{|\mathbf{p}_{\rm in}|}|\mathcal{M}_{fi}|^2\prod_{\substack{\text{external}\\ \text{fermions}}}(2m_{\rm fermi})$$

となる．終状態における各粒子のスピン (偏極) を区別しないならば，これに関する和を取る．また始状態の粒子が非偏極であれば，始状態における粒子のスピンについて和を取り，そのスピン状態数で割って平均化する．

D.III　ダイヤグラムから $-i\mathcal{M}$ を求める規則

a) 外線

吸収される光子 (スピン１のボゾン)：$\epsilon_\mu^{(\alpha)}$ 

放射される光子 (スピン１のボゾン)：$\epsilon_\mu^{(\alpha)}$ 

($\epsilon_\mu^{(\alpha)}$ が円偏光を表す場合は，終状態側に現れるときに複素共役にする．)

吸収もしくは放射されるスピン０のボゾン：１ 

吸収されるスピン $\frac{1}{2}$ のフェルミオン：$u^{(s)}(\mathbf{p})$ 

吸収されるスピン $\frac{1}{2}$ の反フェルミオン：$\bar{v}^{(s)}(\mathbf{p})=(-1)^s\bar{u}^{(5-s)}(-\mathbf{p})$ 

放射されるスピン $\frac{1}{2}$ のフェルミオン：$\bar{u}^{(s)}(\mathbf{p})$ 

放射されるスピン $\frac{1}{2}$ の反フェルミオン：$v^{(s)}(\mathbf{p})=(-1)^s u^{(5-s)}(-\mathbf{p})$ 

b) 結節点(ヴァーテックス)因子

$\mathcal{H}_{\text{int}} = -ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu$　ならば　$-e\gamma_\mu$

$\mathcal{H}_{\text{int}} = G\bar{\psi}\psi\phi$　ならば　$-iG$

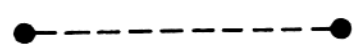
$\mathcal{H}_{\text{int}} = iG\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi$　ならば　$G\gamma_5$，など．

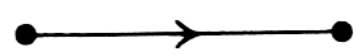
一般に $-i\mathcal{H}_{\text{int}}$ (より正確には $i\mathcal{L}_{\text{int}}$) において，場の演算子をそれぞれ適切な自由粒子波動関数に置き換える．そこから $e^{\pm ip\cdot x}$ や，既に外線によって考慮されている因子 ($\epsilon_\mu^{(\alpha)}$ や $u^{(s)}(\mathrm{p})$ など) や規格化係数 ($\sqrt{m/EV}$ など) を省くと，残りが結節点(ヴァーテックス)因子である[1]．

c) 内線

光子 (‘共変な光子’)：$\dfrac{\delta_{\mu\nu}}{i(q^2 - i\epsilon)}$　

スピン1のボゾン：$\dfrac{1}{i(q^2 + \mu^2 - i\epsilon)}\left(\delta_{\mu\nu} + \dfrac{q_\mu q_\nu}{\mu^2}\right)$　

スピン0のボゾン：$\dfrac{1}{i(q^2 + \mu^2 - i\epsilon)}$　

スピン$\frac{1}{2}$のフェルミオン：$\dfrac{-i\gamma\cdot q + m}{i(q^2 + m^2 - i\epsilon)}$　

d) 注意事項

i) 各結節点(ヴァーテックス)においてエネルギー-運動量保存を仮定する．“不定の”4元運動量(すなわちエネルギー-運動量保存の条件によって固定されない4元運動量) に関して $d^4q/(2\pi)^4$ の積分を実行する．4元運動量が予め固定されるような内線に関する積分は不要である．

ii) 閉じたフェルミオンのループ各々に関して，因子 (-1) を付けて対角和(トレース)を取る．

iii) フェルミオンの“矢をたどる”順序でダイヤグラムの要素を読み取り，右から左へ因子を並べる．

iv) 各ダイヤグラムに対応する各行列要素に対して置換因子 δ_P を掛ける．たとえばフェルミオン-フェルミオン散乱において直接散乱には $+1$，間接散乱には -1 を充て，フェルミオン-反フェルミオン散乱において直接散乱には -1，

[1]相互作用密度が場の演算子の微分を含む場合は，$\mathcal{H}_{\text{int}}$ は $-\mathcal{L}_{\text{int}}$ と異なる．元々P. T. Matthews が擬スカラー場の擬ベクトル結合に対して与えた議論を用いると，Feynmanダイヤグラムにおける結節点因子は $-i\mathcal{H}_{\text{int}}$ からでなく，$i\mathcal{L}_{\text{int}}$ から直接に読み取るべきであることが示される．このこととの関連で言及しておくと，S行列展開を $\mathcal{L}_{\text{int}}$ を用いて ($\mathcal{H}_{\text{int}}$ は使わずに) 定式化することが可能である．Bogoliubov and Shirkov (1959), pp.205-226 を参照されたい．

消滅散乱には +1 を充てる．行列要素の符号は，２つ以上のダイヤグラムからの干渉を考慮する場合や，有効ポテンシャルを構築する場合にのみ，物理的に重要となる．

D.IV　自由粒子スピノルの性質 (p.393, B.IVも参照)

$$(i\gamma\cdot p+m)u^{(s)}(\mathbf{p})=0,\quad \bar{u}^{(s)}(\mathbf{p})(i\gamma\cdot p+m)=0$$
$$(-i\gamma\cdot p+m)v^{(s)}(\mathbf{p})=0,\quad \bar{v}^{(s)}(\mathbf{p})(-i\gamma\cdot p+m)=0$$

$$(p'-p)_\nu\bar{u}'\sigma_{\nu\mu}u=i(p'+p)_\mu\bar{u}'u+(m'+m)\bar{u}'\gamma_\mu u$$
$$(p'-p)_\mu\bar{u}'i\gamma_5\gamma_\mu u=(m'+m)\bar{u}'\gamma_5 u$$

$$\sum_{s=1}^{2}u_\alpha^{(s)}(\mathbf{p})\bar{u}_\beta^{(s)}(\mathbf{p})=\left(\frac{-i\gamma\cdot p+m}{2m}\right)_{\alpha\beta}$$
$$\sum_{s=1}^{2}v_\alpha^{(s)}(\mathbf{p})\bar{v}_\beta^{(s)}(\mathbf{p})=-\left(\frac{i\gamma\cdot p+m}{2m}\right)_{\alpha\beta}$$

$u^{(w)}(\mathbf{p})$ と $v^{(w)}(\mathbf{p})$ が自由粒子スピノルで，

$$i\gamma_5\gamma\cdot w\,u^{(w)}(\mathbf{p})=u^{(w)}(\mathbf{p}),\quad i\gamma_5\gamma\cdot w\,v^{(w)}(\mathbf{p})=v^{(w)}(\mathbf{p})$$

を満たすならば，次式が成立する．

$$u_\alpha^{(w)}(\mathbf{p})\bar{u}_\beta^{(w)}(\mathbf{p})=\left[\left(\frac{-i\gamma\cdot p+m}{2m}\right)\left(\frac{1+i\gamma_5\gamma\cdot w}{2}\right)\right]_{\alpha\beta}$$
$$v_\alpha^{(w)}(\mathbf{p})\bar{v}^{(w)}(\mathbf{p})=\left[-\left(\frac{i\gamma\cdot p+m}{2m}\right)\left(\frac{1+i\gamma_5\gamma\cdot p}{2}\right)\right]_{\alpha\beta}$$

スピンの向きを特定する４元ベクトル w は，以下の性質を持つ．

$$w\cdot p=0$$
$$w^2=|\mathbf{w}|^2-w_0^2=1$$
$$[i\gamma_5\gamma\cdot w,i\gamma\cdot p]=0$$

$$w=\begin{cases}(\hat{\mathbf{n}},0) & \text{静止座標系}\\ (\hat{\mathbf{n}},0) & \text{横方向偏極}\\ \left(\dfrac{E\hat{\mathbf{p}}}{m},\dfrac{i|\mathbf{p}|}{m}\right) & \text{縦方向偏極}\\ \left(\hat{\mathbf{n}}+\dfrac{\mathbf{p}(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{n}})}{m(E+m)},\dfrac{i\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{n}}}{m}\right) & \text{一般の座標系}\end{cases}$$

付録 E　Feynman積分；電子の自己エネルギーと異常磁気能率

Feynmanダイヤグラムにおいて，エネルギー-運動量が固定されていない内線がある場合，４次元の k 空間において自明でない積分を実行する必要が生じる．そのような４次元積分を行うために，R. P. Feynman は巧妙な一連の計算技法を発明した．

有用な積分公式　まず，次の２本の式を証明する．

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2+s-i\epsilon)^3} = \frac{i}{32\pi^2 s} \tag{E.1a}$$

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2+s-i\epsilon)^3} = 0 \tag{E.1b}$$

これらから，他の多くの有用な公式が導出されることになる．第２式(E.1b) は，被積分関数が k_μ の奇関数であり，積分範囲が $\mathbf{k}$ と k_0 の全域にわたるので自明である．式(E.1a) を証明するために，より簡単な１次元積分から考察を始める．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{k^2+s-i\epsilon} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{|\mathbf{k}|^2-k_0^2+s-i\epsilon} \tag{E.2}$$

この積分は，常套的な複素積分路の方法によって扱える．極が $k_0 = \pm\left(\sqrt{|\mathbf{k}|^2+s}-i\delta\right)$ にあることに注意すると，次の結果が得られる．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{(k^2+s-i\epsilon)} = \frac{i\pi}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2+s}} \tag{E.3}$$

(積分路を上半面側で閉じても下半面側で閉じても同じ値になる．) 式(E.3) の両辺を s について２回微分すると，次のようになる．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{(k^2+s-i\epsilon)^3} = \frac{3i\pi}{8} \frac{1}{(|\mathbf{k}|^2+s)^{5/2}} \tag{E.4}$$

残りの３次元積分 ($\mathbf{k}$空間積分) は，被積分関数が球対称なので，初等的に計算できる．

$$\int \frac{d^3k}{(|\mathbf{k}|^2+s)^{5/2}} = 4\pi \int_0^\infty \frac{|\mathbf{k}|^2 d|\mathbf{k}|}{(|\mathbf{k}|^2+s)^{5/2}} = \frac{4\pi}{3s} \tag{E.5}$$

因子 $1/(2\pi)^4$ も併せて考えると，これで式(E.1a) が得られたことになる．

ここで式(E.1a) と式(E.1b) において変数を $k \to k-p$, $s \to s-p^2$ のように置き換える．

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2-2k\cdot p+s-i\epsilon)^3} = \frac{i}{32\pi^2(s-p^2)} \tag{E.6a}$$

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2-2k\cdot p+s-i\epsilon)^3} = \frac{ip_\mu}{32\pi^2(s-p^2)} \tag{E.6b}$$

これらの公式は極めて有用である．続いて式(E.6a) と式(E.6b) の両辺を s と p_ν について微分すると，さらに有用な公式が得られる．

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2-2k\cdot p+s-i\epsilon)^4} = \frac{i}{96\pi^2(s-p^2)^2} \tag{E.7a}$$

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2-2k\cdot p+s-i\epsilon)^4} = \frac{ip_\mu}{96\pi^2(s-p^2)^2} \tag{E.7b}$$

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-2k\cdot p+s-i\epsilon)^4} = \frac{i}{96\pi^2(s-p^2)^2}\left[p_\mu p_\nu + \frac{1}{2}(s-p^2)\delta_{\mu\nu}\right] \tag{E.7c}$$

実際の典型的な４次元積分における被積分関数の分母は，たとえば $(k^2-2p\cdot k)(k^2+\Lambda^2)^2$ のように異なる不変因子の積によって構成されている．そのような積を，式(E.6a) や式(E.7c) が直接適用できるように書き直すことができる．このことを見るために“パラメーター積分の技法”(parameterization method) を利用する (これも Feynman によって共変な摂動論に導入された)．この技法に沿う最も単純な関係式は，

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[ax+b(1-x)]^2} \tag{E.8}$$

である．上式は，

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{dz}{z^2} \tag{E.9}$$

の右辺の積分に $z = ax+b(1-x)$ という変数変換を施すことによって証明される．式(E.8) を a について微分すると，次式を得る．

$$\frac{1}{a^2b} = 2\int_0^1 \frac{xdx}{[ax+b(1-x)]^3} \tag{E.10}$$

式(E.8) を少し一般化すると，次式が得られる．

$$\frac{1}{abc} = 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[a+(b-a)x+(c-a)y]^3} \tag{E.11}$$

上式の証明は，読者の練習問題とする．ここから更に次式が得られる．

$$\frac{1}{a^2bc} = 6\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{(1-x-y)}{[a+(b-a)x+(c-a)y]^4}, \quad \text{etc.} \tag{E.12}$$

電子の自己エネルギー　Feynman の技法を電子の自己エネルギーの計算に応用する方法を見てみよう．式(4.385)，式(4.386)，式(4.389) により，次式を得る．

$$\delta m = -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \frac{[-i\gamma\cdot(p-k)+m]}{-2p\cdot k+k^2} \gamma_\mu \left(\frac{1}{k^2}\right)\left(\frac{\Lambda^2}{k^2+\Lambda^2}\right)\Bigg|_{i\gamma\cdot p=-m} \tag{E.13}$$

ここでは $k^2 \to k^2 - i\epsilon$ の手続きが暗に含まれているものと見なす．式を左から $\bar{u}^{(s')}(\mathbf{p})$，右から $u^{(s)}(\mathbf{p})$ で挟むものとすると，式(4.341) と $\gamma_\mu\gamma_\mu = 4$ により，

$$\begin{aligned} \gamma_\mu\left[-i\gamma\cdot(p-k)+m\right]\gamma_\mu &= 2i\gamma\cdot(p-k)+4m \\ &= -2i\gamma\cdot k + 2m \end{aligned} \tag{E.14}$$

となる．もちろん式(E.11) を用いて，式(E.13) における分母の 3 つの因子を組み合わせることもできるが，ここでは，

$$\left(\frac{1}{k^2}\right)\left(\frac{\Lambda^2}{k^2+\Lambda^2}\right) = \int_0^{\Lambda^2} dt \frac{1}{(k^2+t)^2} \tag{E.15}$$

という関係を利用することにして，式(E.10) を適用する．

$$\begin{aligned} \delta m &= -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^{\Lambda^2} dt \frac{(-2i\gamma\cdot k+2m)}{(-2p\cdot k+k^2)(k^2+t)^2} \\ &= -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^{\Lambda^2} dt \int_0^1 \frac{2x dx(-2i\gamma\cdot k+2m)}{[(k^2+t)x+(k^2-2p\cdot k)(1-x)]^3} \\ &= -ie^2 \int_0^1 dx \int_0^{\Lambda^2} dt \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(4mx-4i\gamma\cdot kx)}{[k^2-2k\cdot p(1-x)+tx]^3} \end{aligned} \tag{E.16}$$

k^2 が実際には $k^2 - i\epsilon$ を意味することを思い出せば，上式に対して式(E.6a) と式(E.6b) を直接適用することができる．k 空間積分を行った結果は次のように与えられる．

$$\begin{aligned} \delta m &= e^2 \int_0^1 dx \int_0^{\Lambda^2} dt \frac{4mx-4i\gamma\cdot px(1-x)}{32\pi^2[tx-p^2(1-x)^2]}\Bigg|_{i\gamma\cdot p=-m} \\ &= \frac{e^2 m}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{\Lambda^2} dt \frac{(2x-x^2)}{tx+m^2(1-x)^2} \end{aligned} \tag{E.17}$$

$\Lambda^2 \gg m^2$ であることを念頭に置きながら，t に関する積分を実行する．

$$\begin{aligned}\int_0^{\Lambda^2} \frac{dt}{tx + m^2(1-x^2)} &= \frac{1}{x}\log\left[\frac{\Lambda^2 x + m^2(1-x)^2}{m^2(1-x)^2}\right] \\ &\approx \frac{1}{x}\log\left[\frac{\Lambda^2 x}{m^2(1-x)^2}\right] \\ &= \frac{1}{x}\left\{\log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + \log\left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]\right\}\end{aligned} \tag{E.18}$$

(x が極端にゼロに近いところでは近似が破綻するが，続いて x に関する積分を行うことに注意せよ．) x に関する最後の積分は初等的である．結果は付加定数を除き，

$$\delta m \simeq \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)\frac{3m}{4\pi}\log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) = \frac{3\alpha m}{2\pi}\log\left(\frac{\Lambda}{m}\right) \tag{E.19}$$

となる．もちろん発散項と共に現れる定数項を重視する必要はない[1]．ここで示した共変な計算は，元々V. F. Weisskopf が旧式の摂動論を用いて行った計算に比べて，数分の一程度の手間で済んでいることを付言しておく．

結節点補正；電子の異常磁気能率　Feynman の技法の第２の応用として，結節点（ヴァーテックス）補正に関係して現れた４次元積分を考察する (式(4.446)参照)．$p^2 = p'^2 = -m^2$ と置くと，補正関数は次のようになる．

$$\begin{aligned}&\Lambda_\mu(p', p)\Big|_{i\gamma\cdot p' = -m,\, i\gamma\cdot p = -m} \\ &\quad = ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\nu[-i\gamma\cdot(p'-k)+m]\gamma_\mu[-i\gamma\cdot(p-k)+m]\gamma_\nu}{k^2(k^2-2p'\cdot k)(k^2-2p\cdot k)}\end{aligned} \tag{E.20}$$

この積分は $|k^2|$ が大きい領域でも小さい領域でも発散する．そこで光子の伝播関数を次のように変更する．

$$\begin{aligned}\frac{1}{k^2} \ \to \ \left(\frac{1}{k^2+\lambda^2_{\min}}\right)\left(\frac{\Lambda^2}{k^2+\Lambda^2}\right) &\approx \frac{\Lambda^2 - \lambda^2_{\min}}{(k^2+\lambda^2_{\min})(k^2+\Lambda^2)} \\ &= \frac{1}{k^2+\lambda^2_{\min}} - \frac{1}{k^2+\Lambda^2} = \int_{\lambda^2_{\min}}^{\Lambda^2} \frac{dt}{(k^2+t)^2}\end{aligned} \tag{E.21}$$

$\lambda_{\min}$ は虚構的な“光子の質量”であり，m に比べて極めて小さいものと仮定する．補正関数は次のようになる．

---

[1] 付加定数の実際の値は，我々が恣意的に採用した切断関数の形に依存して決まる．

$$\Lambda_\mu(p',p)\big|_{i\gamma\cdot p'=-m,\, i\gamma\cdot p=-m} = ie^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int_{\lambda^2_{\min}}^{\Lambda^2} dt\,\frac{N_\mu}{D} \tag{E.22}$$

$$N_\mu = \gamma_\nu\Big[-i\gamma\cdot(p'-k)+m\Big]\gamma_\mu\Big[-i\gamma\cdot(p-k)+m\Big]\gamma_\nu \tag{E.23a}$$

$$D = (k^2+t)^2(k^2-2p\cdot k)(k^2-2p'\cdot k) \tag{E.23b}$$

公式(4.341) を利用して，分子 N_μ を簡単にすることができる[2)].

$$\begin{aligned}N_\mu = {} & 2\gamma\cdot p\,\gamma_\mu\gamma\cdot p' - 2(\gamma\cdot p\,\gamma_\mu\gamma\cdot k + \gamma\cdot k\,\gamma_\mu\gamma\cdot p')\\ & -2im\Big[\gamma_\mu\gamma\cdot(p+p'-2k)+\gamma\cdot(p+p'-2k)\gamma_\mu\Big]\\ & +2\gamma\cdot k\,\gamma_\mu\gamma\cdot k - 2\gamma_\mu m^2\end{aligned} \tag{E.24}$$

分母に関しては D が含む3つの因子を，式(E.12) を利用することによって，積分式の中に統合することができる.

$$\frac{1}{D} = 6\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\,\frac{(1-x-y)}{[k^2+t-(2p\cdot k+t)x-(2p'\cdot k+t)y]^4} \tag{E.25}$$

式の計算に現れている積分を k，t，y，x の順序で行うことにする．k空間の積分は式(E.7) を用いて容易に行える.

$$\begin{aligned}&\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{N_\mu}{[k^2-2k\cdot(px+p'y)+t(1-x-y)]^4}\\ &\quad = \frac{iM_\mu}{96\pi^2[t(1-x-y)-(px+p'y)^2]^2}\end{aligned} \tag{E.26}$$

$$\begin{aligned}M_\mu = {} & 2\gamma\cdot p\,\gamma_\mu\gamma\cdot p' - 2\Big[\gamma\cdot p\,\gamma_\mu\gamma\cdot(px+p'y)+\gamma\cdot(px+p'y)\gamma_\mu\gamma\cdot p'\Big]\\ & -2im\Big[\gamma_\mu\gamma\cdot(p+p'-2px-2p'y)+\gamma\cdot(p+p'-2px-2p'y)\gamma_\mu\Big]\\ & +2\Big[\gamma\cdot(px+p'y)\,\gamma_\mu\gamma\cdot(px+p'y)\Big]\\ & -2\Big[t(1-x-y)-(px+p'y)^2\Big]\gamma_\mu - 2m^2\gamma_\mu\end{aligned} \tag{E.27}$$

ここで p と p' を消して m，q，q^2 だけを残すことにするが，このためには $p'=p+q$，$p\cdot p' = -\Big[m^2+(q^2/2)\Big]$ という関係と，右側 (もしくは左側) にある $-i\gamma\cdot p$ $(-i\gamma\cdot p')$ が常に m に置き換えられることを念頭に置けばよい．たとえば,

$$i\gamma\cdot p'\big|_{\text{右側}} \;\to\; -m+i\gamma\cdot q \tag{E.28}$$

2) 式(E.24) の第3項を $\gamma_\mu(\gamma\cdot b)+(\gamma\cdot b)\gamma_\mu = 2b_\mu$ (次頁訳註参照) を用いて更に簡単にしないことを不思議に思う読者もいるであろう．その理由は，最終的に我々は $\Lambda_\mu(p',p)$ を $q_\nu\sigma_{\nu\mu}$ と γ_μ によって表したいのであり，ここでは $p_\mu+p'_\mu$ と γ_μ の式に持ち込むことを意図していないからである.

となる．したがって，次のようになる．

$$M_\mu = \gamma_\mu\{-2t(1-x-y) - 4m^2[(x+y)^2-(1-x-y)] - 2q^2xy\}$$
$$+im\gamma_\mu\gamma\cdot q[-2x+2(x+y)y] + im\gamma\cdot q\gamma_\mu[2y-2(x+y)x]$$
$$+\gamma\cdot q\,\gamma_\mu\gamma\cdot q(-2xy+2x+2y-2) \tag{E.29}$$

更に，磁気能率のように物理的に観測される効果は，我々が外部ポテンシャルを表すために採用するゲージには依らないことに注意する．外部ポテンシャルが Lorentz条件を満たすものと仮定すると，４元運動量空間では，

$$q_\nu \tilde{A}_\nu(q) = 0 \tag{E.30}$$

となる．これは $\gamma_\mu\gamma\cdot q$ を $-\gamma\cdot q\gamma_\mu$ で置き換えてもよいこと (逆も可能) を意味する．これらの差は $2q_\mu$ であり[‡]，$\tilde{A}_\mu(q)$ とのスカラー積がゼロになるからである．そこで，

$$\gamma_\mu\gamma\cdot q \rightleftharpoons -\gamma\cdot q\gamma_\mu$$
$$\gamma\cdot q\gamma_\mu\gamma\cdot q \to -q^2\gamma_\mu \tag{E.31}$$

を利用すると，式(E.29) は次のように書き直される．

$$M_\mu = \gamma_\mu\{-2t(1-x-y) - 4m^2[(x+y)^2-(1-x-y)] - 2q^2(1-x-y)\}$$
$$+\frac{(\gamma\cdot q\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma\cdot q)}{2i}[-2m(x+y)(1-x-y)] \tag{E.32}$$

ここまでをまとめると Λ_μ は，式(E.32) と次式によって与えられることになる．

$$\Lambda_\mu(p',p)\Big|_{i\gamma\cdot p'=-m,\, i\gamma\cdot p=-m}$$
$$= -\frac{6e^2}{96\pi^2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_{\lambda^2_{\rm min}}^{\Lambda^2} dt\,\frac{(1-x-y)M_\mu}{[t(1-x-y)+m^2(x+y)^2+q^2xy]^2} \tag{E.33}$$

x，y，t に関する積分を実行すると，Λ_μ が次のような形になることは明らかである[3)]．

$$\Lambda_\mu(p',p)\Big|_{i\gamma\cdot p'=-m,\, i\gamma\cdot p=-m} = \gamma_\mu G_1(q^2) + \frac{1}{2m}q_\nu\sigma_{\nu\mu}G_2(q^2) \tag{E.34}$$

[‡](訳註) 公式(4.81) において $a = e_{(\mu)}$，$b = q$ と置けば $\gamma_\mu(\gamma\cdot q) + (\gamma\cdot q)\gamma_\mu = 2q_\mu$ が得られる．p.332訳註参照．

[3)] この Λ_μ の形は，Lorentz不変性，パリティ保存，電荷保存 (ゲージ不変性) の要請だけから導くこともできる．

本文で説明したように，磁気能率に対する Schwinger 補正は，q^2 が小さい領域における $q_\nu\sigma_{\nu\mu}$ 項によって与えられる．そこで $G_2(0)$ を計算してみよう．

$$G_2(0) = \frac{\alpha}{4\pi}(2m)^2\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_{\lambda^2_{\rm min}}^{\Lambda^2} dt\,\frac{(x+y)(1-x-y)^2}{[t(1-x-y)+m^2(x+y)^2]^2} \tag{E.35}$$

t の積分は，次のようになる．

$$\begin{aligned}\int_{\lambda^2_{\rm min}}^{\Lambda^2} dt\,&\frac{1}{[t(1-x-y)+m^2(x+y)^2]^2}\\ &= \frac{1}{1-x-y}\left[\frac{1}{\lambda^2_{\rm min}(1-x-y)+m^2(x+y)^2} - \frac{1}{\Lambda^2(1-x-y)+m^2(x+y)^2}\right]\end{aligned} \tag{E.36}$$

この積分は上限側において完全に収束するので $\Lambda^2\to\infty$ としても問題はない．下限側も $\lambda^2_{\rm min}=0$ とおきたいところであるが，x-y 積分の範囲に $x=y=0$ の点も含まれるので，この段階では $\lambda^2_{\rm min}$ を残す方が安全である．$G_2(0)$ は，

$$G_2(0) = \frac{\alpha m^2}{\pi}\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\,\frac{(x+y)(1-x-y)}{\lambda^2_{\rm min}(1-x-y)+m^2(x+y)^2} \tag{E.37}$$

と書き直される．ここに至ると $\lambda^2_{\rm min}=0$ と置いても，次の関係によって積分は有限になることが分かる．

$$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy = \frac{1}{2} \tag{E.38a}$$

$$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\,\frac{1}{x+y} = -\int_0^1 \log x\,dx = 1 \tag{E.38b}$$

したがって結局は $\lambda^2_{\rm min}=0$ と置くことが許される．仮に式(E.37) の分子が x と y に依存しない因子を持ったとしたならば，このようなことは成立しない．実際，式(E.32) における γ_μ 項のいくつかを積分する場合には，$\log(m^2/\lambda^2_{\rm min})$ に従う結果 ($\lambda^2_{\rm min}\to 0$ において“赤外発散”を生じる) を得るために $\lambda^2_{\rm min}$ を保持することが本質となる．$\lambda^2_{\rm min}=0$ と置くと，式(E.37) の積分を式(E.38) を利用して実行できて，

$$G_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi} \tag{E.39}$$

を得る．これは Schwinger の結果そのものである．

式(E.35) から得た上記の異常磁気能率が，切断 Λ や虚構的な光子質量 $\lambda_{\rm min}$ の極限操作 $\Lambda\to\infty$ および $\lambda_{\rm min}\to 0$ において，これらの恣意的なパラメーターには全

く依存しないことを再び強調しておく．もし異常磁気能率だけの計算に関心があるのであれば，実際には光子伝播関数を式(E.21) のように修正する必要はない．我々は必要以上に入念な計算を行ったのだが，その理由は (a) この方法によって $G_1(q^2)$ も直接計算できること，(b) この方法によれば，切断 Λ が電子の (あるいはミュー粒子の) 質量に比べて充分に大きな値でないときに，これらの異常磁気能率がどのように修正されるかを見ることができるからである (p.382, 問題4.17)．本文で言及したように $G_1(0) = L$ (これは Ward恒等式により B にも等しい) は Λ にも $\lambda_{\min}$ にも対数的に依存する．この Λ に対する対数的な依存性を，式(E.32) と式(E.33) から見て取ることができる．被積分関数には t が大きいときに $1/t$ に従う因子が含まれるからである．他方において，“差” $G_1(q^2) - G_1(0)$ (これは $\Lambda_\mu^f(p', p)$ の γ_μ 部分の係数にあたる) は $\lambda_{\min}$ だけに依存する (式(4.462)参照)．余力のある読者は，係数 L と $G_1(q^2) - G_1(0)$ を (q^2 が小さい場合について) 計算し，式(E.33) の計算を完結するとよい．

参考文献

本書全体を通じて原論文の引用は意図していない．輻射場と共変な量子電磁力学に関する主要論文のある程度の部分は，Schwinger (1958) においてリプリントされている．

1. A. I. Akhiezer and V. B. Berestetskii, *Quantum Electrodynamics* (translated by G. M. Volkoff). Interscience Publishers, New York (1965).
2. H. A. Bethe and E. E. Salpeter, *Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms.* Academic Press, New York (1957).
3. J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics.* McGraw-Hill Book Co., New York (1964).
4. J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields.* McGraw-Hill Book Co., New York (1965).
5. J. M. Blatt, *Superconductivity.* Academic Press, New York (1964).
6. J. M. Blatt and V. F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics.* John Wiley and Sons, New York (1952).
7. N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields* (translated by G. M. Volkoff). Interscience Publishers, New York (1959).
8. E. V. Condon and G. H. Shortley, *The Theory of Atomic Spectra*, 2nd ed. Cambridge University Press, Cambridge, England (1951).
9. R. H. Dicke and J. P. Wittke, *Introduction to Quantum Mechanics.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass. (1960).
10. R. P. Feynman, *Quantum Electrodynamics.* W. A. Benjamin, New York (1961a).
11. R. P. Feynman, *The Theory of Fundamental Processes.* W. A. Benjamin, New York (1961b).
    ファインマン(大場一郎 訳)『ファインマン・レクチャー 素粒子物理学』丸善 (1992).
12. S. Gasiorowicz, *Elementary Particle Physics.* John Wiley and Sons, New York (1966).
13. H. Goldstein, *Classical Mechanics.* Addison-Wesley Press, Cambridge, Mass. (1951).
    原書第３版(2002)の訳：ゴールドスタイン他(矢野忠他訳)『古典力学（上/下)』吉岡書店 (2006/2009).

14. W. Heitler, *Quantum Theory of Radiation*, 3rd ed. Clarendon Press, Oxford, England (1954).
ハイトラー(沢田克郎訳)『輻射の量子論 (上/下)』吉岡書店 (2000).

15. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics.* John Wiley and Sons, New York (1962).
原書第3版(1998)の訳：ジャクソン(西田稔訳)『電磁気学 (上/下)』吉岡書店 (2002/2003).

16. J. M. Jauch and F. Rohrlich, *The Theory of Photons and Electrons.* Addison-Wesley Publishing Co., Cambridge, Mass. (1955).

17. G. Källén, "Quantenelektrodynamik" in *Handbuch der Physik* (S. Flügge, ed.), Band V, Teil 1. Springer-Verlag, Berlin (1958).

18. G. Källén, *Elementary Particle Physics.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass. (1964).

19. C. Kittel, *Elementary Statistical Physics.* John Wiley and Sons, New York (1958).
キッテル(斎藤信彦他訳)『統計物理』サイエンス社 (1977).

20. F. Mandl, *Introduction to Quantum Field Theory.* Interscience Publishers, New York (1959).

21. E. Merzbacher, *Quantum Mechanics.* John Wiley and Sons, New York (1961).

22. A. Messiah, *Quantum Mechanics* (translated by J. Potter). North-Holland Publishing Co., Amsterdam, The Netherlands (1962).
メシア(小出昭一郎他訳)『量子力学 (1/2/3)』東京図書 (1971/1972/1972).

23. P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics.* McGraw-Hill Book Co., New York (1953).

24. N. F. Mott and H. S. Massey, *The Theory of Atomic Collisions*, 2nd ed. Clarendon Press, Oxford, England (1949).
原書第3版(1965)の訳：モット, マッセイ(高柳和夫他訳)『衝突の理論 (上1/上2/下1/下2)』吉岡書店 (1975/1975/1976/1977).

25. K. Nishijima, *Fundamental Particles.* W. A. Benjamin, New York (1964).

26. W. K. H. Panofsky and M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism.* Addison-Wesley Publishing Co., Cambridge, Mass. (1955).
原書第2版(1962)の訳：パノフスキー, フィリップス(林忠四郎他訳)『電磁気学 (上/下)』吉岡書店 (2002).

27. M. A. Preston, *Physics of the Nucleus.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass. (1962).

28. P. Roman, *Advanced Quantum Theory.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass. (1965).

29. M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum.* John Wiley and Sons, New York (1957).
ローズ(山内恭彦, 森田正人訳)『角運動量の基礎理論』みすず書房(1971).

30. M. E. Rose, *Relativistic Electron Theory.* John Wiley and Sons, New York (1961).

31. J. J. Sakurai, *Invariance Principles and Elementary Particles.* Princeton University Press, Princeton, N. J. (1961).

32. S. S. Schweber, *Introduction to Relativistic Quantum Field Theory.* Row and Paterson, Evanston, Ill. (1961).

33. J. Schwinger, *Selected Papers on Quantum Electrodynamics.* Dover Publications, New York (1958).

34. E. Segrè, *Nuclei and Particles.* W. A. Benjamin, New York (1964).
セグレ (真田順平他訳)『原子核と素粒子 (上/下)』吉岡書店 (1972/1973).

35. R. F. Streater and A. S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics, and all that.* W. A. Benjamin, New York (1963).

36. E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals.* Clarendon Press, Oxford, England (1937).

37. G. Wentzel, *Quantum Theory of Fields* (translated by J. M. Jauch). Interscience Publishers, New York (1949).

訳者あとがき

非相対論的な量子力学に関する知識や概念は，すでに物理の専門家だけのものではなくなり，広範な技術分野との関わりを通じて直接・間接に実社会にまで多大な影響を与えるようになっている．一般の理工系学生を対象とした教養課程における教育体制も確立しており，初等的な教科書も様々なものが出版されているので，普通の学生にとって初等量子力学は (最初のうちは途惑うにしても) それほど敷居の高いものではない．しかしその次の段階の内容——輻射の量子論，相対論的電子論，場の量子論の基礎的手法など——を教育的な観点から本格的に扱った教科書は和書にはあまりないし，物理専攻以外の一般の理工系学生が通常のカリキュラムの範囲内で，このような題材に触れることのできる機会もおそらく多くはない．本書の原書にあたる J.J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, 1967 は，まさにこのような，初等量子力学より一段階上の水準の量子力学を扱った定評のある教科書だが，40年以上の間，訳出されることはなかった．一般の理工系学生にとって，このような水準の題材は依然として敷居の高いものにとどまっているようである．

本書で扱われる内容が平凡な理工系の学生にとって，かなり高度なものに感じられるであろうことは否めないが (他人事ではなくそう思う)，落ち着いて考えてみると，本書で扱われている題材の多くの部分は，我々の日常世界からそれほどかけ離れたものではない．Rayleigh散乱は原著者の序にもあるように「空はなぜ青いか？」という素朴な疑問に対する解答であるし，我々は蛍光灯を使う際に (エネルギーは低いにしても) 電子を原子に衝突させるということを日常的に行っている．電子のスピン-軌道相互作用 (→ Thomas項) はもちろんのこと，高速微細振動 (→ Darwin項) も電子伝播の自己場補正 (→ Lambシフト主要項) も真空偏極 (→ Uehling項) も，さらには超微細分裂や核子間の相互作用も，日常世界にあるごくありふれた原子の中で起こっているはずのことである．β崩壊のような放射性崩壊を普段意識することは少なくても，放射性同位体は身近な環境の中にも微量ながら遍在していて，たとえば炭素14 が広く年代測定に使えることなどはそのおかげであるし，人体内部にもカリウム40 などの放射性同位体が常にあって (あまり気分のよい話ではないが) 毎秒千個程度

の原子が体内で崩壊を起こしている．Λハイペロンの崩壊でさえも霧箱による“自然観察”が可能な現象であり，巨大加速器を用いて初めて確認されるような非日常的なものでない．原著者は序文において“現在”では本書の内容が物理を専攻する博士課程の学生全員にとって必須の内容であるべきことを主張しているが，その“現在”から更に40年以上を経た2010年の今日，本書の内容は一般の理工系の学生が日常的な自然科学の基礎として，必須とは言わぬまでも，かなりの程度まで馴染んでおくことが望ましい内容と言ってよいのではなかろうか．

原著者のJun John Sakurai (桜井純)は1933年に東京に生まれ，中学校修了時に渡米，その後は米国(ハーバード大学, コーネル大学大学院)で学んだ理論物理学者である．シカゴ大学やカリフォルニア大学ロサンゼルス校で教鞭を取り1982年に49歳で急逝しているが，生前CERNの人々とも親交を持ち，実験の成果によく通じた理論家であったと言われる．本書でも理論を語りながら実験の意義を常に重視し，具体的な現象との関わり合いを読者に意識させようとする執筆姿勢が貫かれている．このような思考様式は物理学者はもちろんのこと，科学技術全般に関わる一般の研究者・技術者が遍く身に着けておくべきものである．先ほども述べたように原書は定評のあるロングセラーであり，独習にも適したテキストなので，実力と余力のある学生はもちろん原書を読むのもよいと思う．しかし英語の本を読みこなすことはやはり普通の学生にとってかなりの負担であり，学生と言えども自由に使える時間は限られているので，学生時代に洋書の専門書を何冊も丹念に読みこなすことは容易ではない．今日，物理の理論に携わる者にとって，本書程度の内容はやはり研究に入るまえの前提として習得しておくべき素養にあたるわけで，早いうちに訳書を利用して，なるべく時間をかけずに本書の内容をひと通り習得しておき，さらに専門的な書籍に本格的に取り組むことに十分な時間を充てたいと考える学生がいても不自然ではないだろう．また実験などで忙しく，理論の洋書を入念に読む時間を捻出するのが困難な工学系の学生や技術者も，多少なりとも訳書を通じてこの水準の内容に触れる機会ができるとすれば，それにも大いに意義があると思う．一個人の余技としての訳出ゆえ，訳稿の仕上がりは必ずしも十全とは言えないかも知れないが，訳者としてはこの訳書が多くの学生や一般の研究者・技術者によって，それぞれの立場から有効に活用されることを望むばかりである．

今回も訳書の出版にあたり，水越真一氏，戸辺幸美氏ほか，丸善プラネット株式会社の関係各位に世話になった．御礼を申し上げる．

2010年3月

茨城県ひたちなか市にて　　樺沢宇紀

索 引

<な行>

<は行>

訳者略歴
1990年　大阪大学大学院基礎工学研究科物理系専攻前期課程修了
　　　　㈱日立製作所 中央研究所 研究員
1996年　㈱日立製作所 電子デバイス製造システム推進本部 技師
1999年　㈱日立製作所 計測器グループ 技師
2001年　㈱日立ハイテクノロジーズ 技師

著書
Studies of High-Temperature Superconductors, Vol. 1
（共著，Nova Science，1989）
Studies of High-Temperature Superconductors, Vol. 6
（共著，Nova Science，1990）

訳書
『多体系の量子論』（シュプリンガー，1999）
『現代量子論の基礎』（丸善プラネット，2000）
『メソスコピック物理入門』（吉岡書店，2000）
『量子場の物理』（シュプリンガー，2002）
『ニュートリノは何処へ？』（シュプリンガー，2002）
『低次元半導体の物理』（シュプリンガー，2004）
『素粒子標準模型入門』（シュプリンガー，2005）
『半導体デバイスの基礎（上/中/下）』（シュプリンガー，2008）
『ザイマン現代量子論の基礎—新装版』（丸善プラネット，2008）
『現代量子力学入門—基礎理論から量子情報・解釈問題まで』（丸善プラネット，2009）

サクライ「上級量子力学」第Ⅱ巻　共変な摂動論

2010年4月20日　初版発行
2010年7月25日　第2刷発行

訳者　樺沢宇紀

発行所　丸善プラネット株式会社
〒140-0002 東京都品川区東品川 4-13-14
電話 03-5781-0721
http://planet.maruzen.co.jp/

発売所　丸善株式会社出版事業部
〒140-0002 東京都品川区東品川 4-13-14
電話 03-6367-6038
http://pub.maruzen.co.jp/

印刷・製本/富士美術印刷株式会社

ISBN 978-4-86345-048-6 C3042